Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 3/12/2015

Άσκηση 1: Δρομολόγηση Μαθημάτων

Στο πρόβλημα δρομολόγησης μαθημάτων έχουμε n αιτήματα για διδασκαλία μαθημάτων, κάθε αίτημα i χαρακτηρίζεται από το χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ στο οποίο θα πρέπει διδαχθεί το μάθημα, και στόχος είναι να επιλέξουμε ένα μέγιστο, ως προς τον πληθικό του αριθμό, σύνολο μαθημάτων που δεν έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους.

(α) Γνωρίζουμε ήδη ότι μπορούμε να υπολογίσουμε μια βέλτιστη λύση εφαρμόζοντας το άπληστο κριτήριο του *ελάχιστου χρόνου ολοκλήρωσης*, σύμφωνα με το οποίο επιλέγουμε το διαθέσιμο μάθημα με τον ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης, αφαιρούμε όσα μαθήματα επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.

Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω εναλλακτικά κριτήρια εγγυώνται μια βέλτιστη λύση και ποια όχι. Για κάθε κριτήριο, πρέπει είτε να αποδείξετε ότι οδηγεί πάντα σε μία βέλτιστη λύση είτε να βρείτε ένα στιγμιότυπο όπου η λύση στην οποία οδηγούμαστε δεν είναι βέλτιστη. Για διευκόλυνση, μπορείτε να "σπάσετε" τις ισοπαλίες (ως προς το κριτήριο που εφαρμόζετε) με όποιον τρόπο επιθυμείτε.

1. *Λιγότερες επικαλύψεις*: Επιλέγουμε το μάθημα με τις λιγότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα, αφαιρούμε όλα τα μαθήματα που επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.
2. *Μεγαλύτερη διάρκεια*: Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα με τη μεγαλύτερη διάρκεια και επαναλαμβάνουμε.
3. *Περισσότερες επικαλύψεις*: Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα που έχει τις περισσότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα και επαναλαμβάνουμε.

(β) Ένα διαδικτυακό Πανεπιστήμιο έχει καθιερώσει τη διδασκαλία μαθημάτων σε 24ωρη βάση. Κάθε μάθημα i, $i = 1, \dots, n$, πρέπει να διδάσκεται κάθε μέρα στο ίδιο χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$, όπου τα s_i και f_i είναι ρητοί αριθμοί στο διάστημα $[0, 24)$. Ως φοιτητής με υπερβάλλοντα ζήλο για τις σπουδές σας, ενδιαφέρεστε να παρακολουθείτε όσο το δυνατόν περισσότερα μαθήματα. Θέλετε, κατά συνέπεια, να υπολογίσετε ένα μέγιστο, ως προς τον πληθικό του αριθμό, σύνολο μαθημάτων που μπορείτε να παρακολουθείτε μέσα σε ένα 24ωρο, ώστε να μην υπάρχουν επικαλύψεις μεταξύ των μαθημάτων. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(γ) Στο συμβατικό Πανεπιστήμιο, το σύστημα εκπαίδευσης είναι λιγότερο απαιτητικό. Κάθε μάθημα i, $i = 1, \dots, n$, διδάσκεται στο χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ και δίνει στο φοιτητή έναν αριθμό διδακτικών μονάδων w_i με την επιτυχή παρακολούθησή του. Βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα σύνολο μαθημάτων που δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους και μεγιστοποιεί τον συνολικό αριθμό διδακτικών μονάδων.

Άσκηση 2: Πομποί και Δέκτες

(α) Έχουμε n κεραίες που διακρίνονται σε πομπούς και δέκτες και είναι τοποθετημένες σε μια νοητή ευθεία, στην διεύθυνση δύσης - ανατολής. Οι πομποί εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες λαμβάνουν μόνο από τα δυτικά. Κάθε πομπός μπορεί να στέλνει μηνύματα σε έναν και μοναδικό δέκτη (και αντίστοιχα κάθε δέκτης μπορεί να λαμβάνει μηνύματα από έναν και μοναδικό πομπό, δεν έχουμε καθόλου προβλήματα παρεμβολών ή εξασθένησης σήματος λόγω της απόστασης). Το ζητούμενο είναι να μεγιστοποιήσουμε τους πομπούς και τους δέκτες που χρησιμοποιούνται. Κωδικοποιούμε, λοιπόν, το παραπάνω πρόβλημα ως μία ακολουθία $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ όπου $\alpha_i = t$ (αντίστοιχα, $\alpha_i = r$) αν η κεραία στη θέση i είναι πομπός (αντίστοιχα, δέκτης). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που, με είσοδο μια τέτοια ακολουθία, υπολογίζει τον μέγιστο αριθμό πομπών και δεκτών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.

(β) Έπειτα από αναβάθμιση του συστήματος, οι κεραίες μας μπορούν πλέον να λειτουργούν είτε ως πομποί είτε ως δέκτες. Όταν μία κεραία i λειτουργεί ως πομπός, έχει κατανάλωση ισχύος T_i, ενώ όταν λειτουργεί ως δέκτης έχει κατανάλωση ισχύος $R_i \leq T_i$. Για διευκόλυνση, θεωρούμε ότι έχουμε άρτιο πλήθος κεραιών n. Δυστυχώς η αναβάθμιση δεν κατάφερε να αντιμετωπίσει τον περιορισμό στην κατεύθυνση εκπομπής (οι πομποί συνεχίζουν να εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες να λαμβάνουν μόνο από τα δυτικά) και τον περιορισμό του μοναδικού πομπού για μοναδικό δέκτη. Το ζητούμενο είναι να χωρίσουμε τις κεραίες σε $n/2$ ζεύγη πομπού-δέκτη ώστε να ελαχιστοποιήσετε τη συνολική κατανάλωση ισχύος (οι κεραίες αριθμούνται πάντα από τα δυτικά προς τα ανατολικά, και για κάθε ζεύγος πομπού i – δέκτη j, πρέπει να ισχύει ότι $i < j$). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (υπάρχει bonus για ιδιαίτερα αποδοτικούς αλγόριθμους). *Παράδειγμα* : Έστω ότι έχουμε 4 κεραίες με κατανάλωση ενέργειας (ως πομποί και δέκτες αντίστοιχα, από τα δυτικά προς τα ανατολικά): $(9, 6)$, $(6, 2)$, $(8, 1)$ και $(5, 3)$. Βέλτιστη λύση είναι να "ζευγαρώσουμε" τις κεραίες 1-3 και 2-4 ή τις κεραίες 1-4 και 2-3, με συνολική κατανάλωση ενέργειας 19.

Άσκηση 3: Τηλεκατευθυνόμενο Drone

Το φετινό Χριστουγεννιάτικο δώρο σας είναι ένα drone που μπορείτε να κατευθύνετε από το κινητό σας, μέσω wifi. Το drone σας κινείται μόνο σε μία διάσταση, σε μία νοητή ευθεία με ακέραιες συντεταγμένες (δυστυχώς, δεν υπήρχαν χρήματα για κάποιο πιο εξελιγμένο μοντέλο). Κάθε χρονική στιγμή i, $1 \leq i \leq n$, στέλνετε ένα σήμα $s_i \in \{-1, 1\}$ και το drone οφείλει να εκτελέσει την κίνηση s_i, δηλ. να μετακινηθεί μία θέση αριστερά, από το σημείο x στο $x - 1$, αν $s_i = -1$, ή να μετακινηθεί μία θέση δεξιά από το x στο $x + 1$, αν $s_i = 1$. Λόγω παρεμβολών, το drone δεν λαμβάνει πάντα το σωστό σήμα. Έτσι, τη χρονική στιγμή i, το drone λαμβάνει σήμα $\hat{s}_i \in \{-1, 1\}$ και με βάση την ισχύ των παρεμβολών, υπολογίζει την πιθανότητα $p_i \in [0, 1]$ αυτό το σήμα να είναι σωστό, δηλ. να ισχύει ότι $\hat{s}_i = s_i$. Προσαρμοσμένο σε αυτά τα δεδομένα, το drone εκτελεί την κίνηση $\hat{s}_i$ με πιθανότητα p_i, και την κίνηση $-\hat{s}_i$ με πιθανότητα $1 - p_i$. Ξεκινώντας από τη θέση 0, έστω $k = \sum_{i=1}^{n} s_i$ η θέση όπου θέλετε να βρεθεί το drone τη χρονική στιγμή n. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(k, n)$ το drone να βρεθεί πράγματι στη θέση k τη χρονική στιγμή n. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την πιθανότητα $P(k, n)$ με δεδομένα την επιθυμητή θέση k, την ακολουθία σημάτων $(\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$ που λαμβάνει το drone και τις πιθανότητες $(p_1, \ldots, p_n)$ με τις οποίες εκτελεί τις αντίστοιχες κινήσεις. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Βγάζοντας Βόλτα το Σκύλο

Ενδιαφέρεστε να αγοράσετε καινούριο λουρί για να βγάζετε βόλτα το σκύλο σας και θέλετε να υπολογίσετε το μήκος του λουριού που θα αγοράσετε (το σχέδιο το έχετε ήδη αποφασίσει). Έχοντας βγάλει πολλές φορές το σκύλο σας βόλτα, ξέρετε ότι εσείς βαδίζετε σε μία πολυγωνική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $p_1, \ldots, p_n$, και ο σκύλος σας βαδίζει σε μία αντίστοιχη πολυγωνική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $q_1, \ldots, q_m$, καθώς τον κρατάτε από το λουρί. Υποθέτουμε πως τα βήματά σας αντιστοιχούν ακριβώς στα n (m, αντίστοιχα, για το σκύλο) σημεία των καμπύλων και επομένως κάθε χρονική στιγμή βρίσκεστε σε κάποιο από τα σημεία $p_1, \ldots, p_n$ ($q_1, \ldots, q_m$, αντίστοιχα, για το σκύλο). Τόσο εσείς όσο και ο σκύλος σας μπορείτε να σταματήσετε σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης, για όσο χρόνο χρειαστεί, αλλά ποτέ δεν γυρίζετε προς τα πίσω. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το ελάχιστο μήκος λουριού που επαρκεί για την καθημερινή βόλτα του σκύλου. Μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένη μία συνάρτηση d που υπολογίζει σε σταθερό χρόνο την απόσταση $d(p, q)$ μεταξύ ενός σημείου p στη δική σας διαδρομή και ενός σημείου q στη διαδρομή του σκύλου. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 5: Αναβάθμιση του 242

Οδηγείτε ένα λεωφορείο γεμάτο νυσταγμένους φοιτητές που θέλουν να φτάσουν στις σχολές τους για να παρακολουθήσουν τα πρωινά τους μαθήματα. Το λεωφορείο σας είναι εξοπλισμένο με μια μηχανή που διανέμει καφέ (δωρεάν!) στους φοιτητές. Για κάθε λεπτό που παραμένει στο λεωφορείο, ένας φοιτητής καταναλώνει 50ml καφέ. Γνωρίζετε τις n στάσεις όπου θα κατέβουν οι φοιτητές καθώς και το πλήθος s_i των φοιτητών που κατεβαίνει σε κάθε στάση i. Γνωρίζετε ακόμη ότι οι στάσεις βρίσκονται σε μια νοητή ευθεία (και αριθμούνται με τη σειρά, από τα αριστερά προς τα δεξιά) και την απόσταση $d(i, i+1)$ (σε km) μεταξύ κάθε ζεύγους διαδοχικών στάσεων. Για απλότητα, υποθέτουμε ότι το λεωφορείο κινείται με σταθερή ταχύτητα 30km/h, ότι ο χρόνος για να κατέβουν οι φοιτητές σε κάθε στάση (καθώς και για την επιβράδυνση και την επιτάχυνση του λεωφορείου) είναι αμελητέος, και ότι το λεωφορείο ξεκινά τη χρονική στιγμή 0 από μια στάση k, $1 \leq k \leq n$, στην οποία επιβιβάζονται όλοι οι φοιτητές (η αρχική στάση k δεν βρίσκεται κατ' ανάγκη στα άκρα της νοητής ευθείας).

(α) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει τη σειρά με την οποία πρέπει να επισκεφθείτε τις στάσεις των σχολών ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνολική κατανάλωση καφέ από τους φοιτητές. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β, **bonus**) Μετά από πολλά παράπονα, συνειδητοποιείτε ότι η διαδρομή που υπολογίσατε στο (α) οδηγεί πολλούς φοιτητές να φθάνουν με σημαντική καθυστέρηση στα μαθήματά τους. Οπότε ζητάτε από τους φοιτητές που κατεβαίνουν σε κάθε στάση i να δηλώσουν τη χρονική στιγμή t_i μέχρι την οποία πρέπει να φτάσουν στη στάση για να προλάβουν την έναρξη των μαθημάτων. Να βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που εγγυάται ότι όλοι οι φοιτητές φθάνουν στην ώρα τους για το μάθημα (εφόσον βέβαια αυτό είναι εφικτό – αν δεν είναι εφικτό, οφείλετε να ενημερώσετε τους φοιτητές) και ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί την ποσότητα του καφέ που καταναλώνουν οι φοιτητές. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.