Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 15/2/2016

Άσκηση 1: Επιβεβαίωση Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα (ισχυρά συνεκτικό) κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές και (ενδεχομένως αρνητικά) μήκη w στις ακμές, και συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την απόσταση των κορυφών u και v στο G. Δίνονται n αριθμοί $\delta_1, \ldots, \delta_n$, όπου κάθε δ_k (υποτίθεται ότι) ισούται με την απόσταση $d(v_1, v_k)$ στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν τα $\delta_1, \ldots, \delta_n$ πράγματι ανταποκρίνονται στις αποστάσεις των κορυφών από την v_1, δηλαδή αν για κάθε $v_k \in V$, ισχύει ότι $\delta_k = d(v_1, v_k)$. Αν αυτό αληθεύει, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει και να επιστρέφει ένα Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών με ρίζα τη v_1.

Άσκηση 2: Τροποποίηση του Αλγόριθμου Dijkstra (DPV 4.17)

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές και (μη αρνητικά) ακέραια μήκη w στις ακμές.

(α) Έστω ότι υπάρχει ένας (σχετικά μικρός) φυσικός C τέτοιος ώστε $w(e) \in \{0, 1, \ldots, C\}$ για κάθε ακμή e. Να περιγράψετε μια υλοποίηση του αλγορίθμου Dijkstra με χρόνο εκτέλεσης $O(nC + m)$.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $w(e) \in \{0, 1, \ldots, 2^C\}$ για κάθε ακμή e. Να περιγράψετε μια υλοποίηση του αλγορίθμου Dijkstra με χρόνο εκτέλεσης $O((n + m)C)$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα της υλοποίησης που προτείνετε.

Άσκηση 3: Συντομότερα Μονοπάτια με Δύο Κριτήρια

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$ με n κορυφές, m ακμές, θετικά μήκη w και μη αρνητικά κόστη c στις ακμές. Έστω ακόμη μια αρχική κορυφή s του G.

(α) Αρχικά υποθέτουμε ότι για κάθε ακμή e, $c(e) \in \{0, 1\}$. Ας ονομάσουμε μια ακμή e πράσινη, αν $c(e) = 0$, και κόκκινη, αν $c(e) = 1$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που για κάθε κορυφή $u \in V$, υπολογίζει το μήκος του συντομότερου $s - u$ μονοπατιού που περιέχει το πολύ μία κόκκινη ακμή. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Να γενικεύσετε τον αλγόριθμο του (α) ώστε για κάθε κορυφή $u \in V$, να υπολογίζει το μήκος του συντομότερου $s - u$ μονοπατιού που περιέχει το πολύ k κόκκινες ακμές, για δεδομένο φυσικό $k \geq 1$. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του γενικευμένου αλγόριθμου;

Άσκηση 4: Σύστημα Ανισοτήτων και Μετατροπή Σταθερών Όρων

Έστω $x_1, \ldots, x_n$ ακέραιες μεταβλητές. Θεωρούμε σύστημα S αποτελούμενο από m ανισότητες της μορφής $x_i - x_j \leq b_{ij}$, για κάποια $1 \leq i, j \leq n$, όπου τα b_{ij} είναι ακέραιοι. Το S είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχουν ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ που ικανοποιούν όλες τις ανισότητες.

(α) Να διατυπώσετε ένα κριτήριο για το αν το S είναι ικανοποιήσιμο (και να αποδείξετε την ορθότητα του κριτηρίου σας). Με βάση αυτό το κριτήριο, να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που διαπιστώνει αν το S είναι ικανοποιήσιμο ή όχι. Αν το σύστημα είναι ικανοποιήσιμο, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει αποδεκτές τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(β) Θέλουμε να μετατρέψουμε το S σε ένα *ισοδύναμο* σύστημα S' με αντίστοιχες ανισότητες $x_i - x_j \leq b'_{ij}$, όπου η μοναδική διαφορά είναι ότι οι σταθεροί όροι b'_{ij} είναι μη αρνητικοί. Τα S και S' είναι *ισοδύναμα* όταν το S' είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το S είναι ικανοποιήσιμο. Για τον σκοπό αυτό, μπορούμε να τροποποιήσουμε τους σταθερούς όρους του S (μόνο) μέσω μιας διαδικασίας $\mathrm{Change}(S, i, k)$ που προσθέτει τον αριθμό k σε όλα τα b_{ij}, $1 \leq j \leq n$, και αφαιρεί τον k από όλα τα $b_{\ell i}$, $1 \leq \ell \leq n$. Θέλουμε να διαπιστώσουμε αν με διαδοχικές κλήσεις της Change, το αρχικό σύστημα S μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο σύστημα S' με όλα τα $b'_{ij} \geq 0$. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα (υποθέστε εδώ ότι το S περιλαμβάνει $m = \Theta(n \log^2 n)$ ανισότητες). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Αν το S' είναι ικανοποιήσιμο, να δείξετε ακόμη πως μπορούμε να υπολογίσουμε αποδοτικά μια αποδεκτή λύση του S από μια αποδεκτή λύση του S'.

Άσκηση 5: Διαφημίσεις στο Διαδίκτυο

Είμαστε υπεύθυνοι για τη λειτουργία ενός ειδησεογραφικού web site που δέχεται καθημερινές επισκέψεις από τους ίδιους n ανθρώπους. Οι επισκέπτες του site κατηγοριοποιούνται με βάση συγκεκριμένες ιδιότητες (π.χ., άνδρας ή γυναίκα, παντρεμένος ή όχι, εργαζόμενος ή άνεργος, δημόσιος ή ιδιωτικός τομέας εργασίας, ηλικιακή κατηγορία, κάτοικος Ελλάδας ή εξωτερικού). Κάθε επισκέπτης μπορεί να ανήκει σε μία ή περισσότερες από τις k δημογραφικές κατηγορίες που ορίζονται με βάση αυτές τις ιδιότητες. Τα έσοδά μας προέρχονται αποκλειστικά από τις διαφημίσεις m εταιρειών που προβάλλονται στο site μας. Με βάση τα χρήματα που διαθέτει κάθε εταιρεία i, μπορεί να εμφανίζονται το πολύ c_i διαφημίσεις της κάθε ημέρα. Επιπλέον, κάθε εταιρεία i επιθυμεί οι διαφημίσεις της να προβάλλονται μόνο σε επισκέπτες που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο $S_i \subseteq \{1, \ldots, k\}$ από τις k δημογραφικές κατηγορίες στις οποίες ανήκουν οι επισκέπτες μας.

Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που με βάση τα παραπάνω δεδομένα, αποφασίζει αν είναι δυνατόν να εμφανίζεται μια διαφήμιση σε κάθε επισκέπτη ώστε να προβάλλονται το πολύ c_i διαφημίσεις κάθε εταιρείας i και οι διαφημίσεις της εταιρείας i να απευθύνονται μόνο σε επισκέπτες που ανήκουν στις δημογραφικές κατηγορίες του S_i. Αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό, ο αλγόριθμος θα πρέπει να υπολογίζει ποιοι επισκέπτες θα βλέπουν τις διαφημίσεις κάθε εταιρείας. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 5: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

Υποσύνολα Διαφορετικών Συνόλων
Είσοδος: Σύνολα φυσικών αριθμών $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ και $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ και φυσικός $B \geq 1$.
Ερώτηση: Υπάρχουν μη κενά υποσύνολα $S_1 \subseteq X$ και $S_2 \subseteq Y$ με $|x(S_1) - y(S_2)| = B$;

Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση
Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ με n φυσικούς και φυσικοί B και x με $B > x \geq 1$.
Ερώτηση: Υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - x \leq w(S) \leq B$;

Μακρύ Μονοπάτι

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.

Ερώτηση: Υπάρχει στο G μονοπάτι με μήκος τουλάχιστον $|V|/2$;

Επιλογή Ανεξάρτητων Υποσυνόλων

Είσοδος: Συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ υποσυνόλων ενός συνόλου U με n στοιχεία και φυσικός αριθμός k, $2 \leq k \leq m$.

Ερώτηση: Υπάρχουν k υποσύνολα στη συλλογή $\mathcal{S}$ που να είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους;

Διαχωρισμός σε Κλάσεις

Είσοδος: Σύνολο $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ με n σημεία, οι αποστάσεις $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i) \in \mathbb{N}$ για όλα τα ζευγάρια διαφορετικών σημείων στο P, και θετικοί φυσικοί B και $k \geq 3$.

Ερώτηση: Υπάρχει διαμέριση του P σε k κλάσεις $P_1, \ldots, P_k$ έτσι ώστε για κάθε κλάση P_ℓ και για κάθε ζευγάρι σημείων $p_i, p_j \in P_\ell$, $d(p_i, p_j) \leq B$ (δηλ. πρέπει όλα τα σημεία στην ίδια κλάση να απέχουν απόσταση το πολύ B μεταξύ τους);

Συνδετικό Δέντρο με Περιορισμούς

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, p, w)$, όπου κάθε ακμή e έχει μια ακέραιη αξία $p(e) \geq 0$ και ένα ακέραιο βάρος $w(e) \geq 0$, και δύο ακέραιοι $P, W \geq 0$.

Ερώτηση: Υπάρχει συνδετικό δέντρο του G με συνολική αξία τουλάχιστον P και συνολικό βάρος το πολύ W;