



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης

3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 11/1/2016

Άσκηση 1: Τηλεμεταφορές

Σε έναν μακρινό γαλαξία, η Αυτοκρατορία αποφάσισε να δημιουργήσει ένα νέο διαστημικό δίκτυο μεταφοράς εμπορευμάτων, ώστε να διευκολύνει το διαπλανητικό εμπόριο. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να δημιουργήσει αμφίδρομα κανάλια μεταφοράς μεταξύ κάποιων ζευγών πλανητών. Η δημιουργία καναλιού μεταφοράς μεταξύ δύο πλανητών i και j κοστίζει $A[i, j]$, καθώς πρέπει να απομακρυνθούν όσοι αστεροειδείς βρίσκονται ανάμεσα στους πλανήτες i και j , ενώ μπορεί να υπάρχουν ζευγάρια πλανητών μεταξύ των οποίων δεν είναι εφικτή η δημιουργία καναλιού μεταφοράς. Επιπλέον, υπάρχουν K πλανήτες που διαθέτουν πιο ανεπτυγμένη τεχνολογία και υποστηρίζουν την εγκατάσταση τηλεμεταφορέων. Το κόστος εγκατάστασης τηλεμεταφορέα σε έναν πλανήτη i είναι $B[i]$ (εφόσον βέβαια ο πλανήτης i υποστηρίζει την τεχνολογία τηλεμεταφοράς). Σε ένα τέτοιο δίκτυο, εμπορεύματα μπορούν να μεταφερθούν από έναν πλανήτη i σε έναν πλανήτη j αν και μόνο αν οι πλανήτες i και j συνδέονται μεταξύ τους απευθείας, μέσω μονοπατιού καναλιών μεταφοράς, ή αν οι πλανήτες i και j συνδέονται, μέσω μονοπατιών καναλιών μεταφοράς, με δύο πλανήτες (με τον ένα ο i και με τον άλλο ο j) που έχουν τηλεμεταφορέα.

Να γράψετε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει το ελάχιστο συνολικό κόστος για τη δημιουργία ενός τέτοιου διαστημικού δικτύου που επιτρέπει τη μεταφορά εμπορευμάτων μεταξύ κάθε ζεύγους πλανητών.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάξει από το standard input τρεις θετικούς ακεραίους N , K και M , που αντιστοιχούν στο συνολικό πλήθος των πλανητών, στο πλήθος των πλανητών όπου μπορεί να εγκατασταθεί τηλεμεταφορέας και στο πλήθος των δυνατών καναλιών μεταφοράς μεταξύ ζευγαριών πλανητών. Σε κάθε μία από τις επόμενες K γραμμές, θα περιέχονται δύο θετικοί ακέραιοι i και $B[i]$ που δηλώνουν ότι είναι δυνατή η εγκατάσταση τηλεμεταφορέα στον πλανήτη i με κόστος $B[i]$. Στη συνέχεια θα υπάρχουν M γραμμές, καθεμία από τις οποίες θα περιέχει τρεις θετικούς ακεραίους i , j και $A[i, j]$ που δηλώνουν ότι είναι δυνατή η δημιουργία καναλιού μεταφοράς μεταξύ των πλανητών i και j με κόστος $A[i, j]$.

Να θεωρήσετε ότι οι πλανήτες αριθμούνται από 1 έως N , ότι όλα τα κανάλια μεταφοράς θα έχουν διαφορετικά άκρα, ότι τα κανάλια μεταφοράς είναι αμφίδρομα και ότι θα είναι πάντοτε εφικτό να κατασκευάσουμε ένα συνεκτικό διαστημικό δίκτυο που επιτρέπει τη μεταφορά εμπορευμάτων μεταξύ κάθε ζεύγους πλανητών.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν θετικό ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο συνολικό κόστος για τη δημιουργία ενός διαστημικού δικτύου που επιτρέπει τη μεταφορά εμπορευμάτων μεταξύ κάθε ζεύγους πλανητών¹. Προσέξτε ότι αν δημιουργήσουμε κανάλια επικοινωνίας που συνδέουν όλους τους πλανήτες, τότε δεν χρειάζεται να εγκαταστήσουμε τηλεμεταφορείς.

¹ **Επεξήγηση παραδείγματος:** Η βέλτιστη λύση είναι να εγκαταστήσουμε τηλεμεταφορείς στους πλανήτες 1 και 6, με κόστος $3 + 5 = 8$, και να δημιουργήσουμε κανάλια επικοινωνίας μεταξύ των πλανητών $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 7\}$ και $\{6, 7\}$, με συνολικό κόστος $2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 9$. Έχουμε δηλαδή συνολικό κόστος $8 + 9 = 17$.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$2 \leq N \leq 10.000$	7 2 8	17
$0 \leq K \leq N$	1 3	
$N - 1 \leq M \leq 500.000$	6 5	
$1 \leq A[i, j] \leq 100.000$	4 6 3	
$1 \leq B[i] \leq 100.000$	6 7 2	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	3 2 2	
Όριο μνήμης: 64 MB.	5 7 2	
	5 4 1	
	3 5 9	
	1 3 2	
	4 7 5	

Άσκηση 2: Σχέδιο Ληστείας

Στην μακρινή Λεφτούπολη, μία τράπεζα διακινεί κάθε μέρα μεγάλα ποσά χρημάτων. Για τις χρηματοπιστωτικές, χρησιμοποιεί ένα συνεκτικό υποδίκτυο του οδικού δικτύου της πόλης. Προκειμένου να μειώσει τις πιθανότητες ληστείας, κάθε πρωί εφαρμόζει μέτρα ασφαλείας στους δρόμους του υποδικτύου αυτού. Τα μέτρα ασφαλείας έχουν κόστος c_e για κάθε δρόμο e . Για ακόμα μεγαλύτερη ασφάλεια, η τράπεζα αλλάζει καθημερινά το υποδίκτυο που χρησιμοποιεί με βάση έναν σύνθετο αλγόριθμο που καθιστά εξαιρετικά δύσκολη την πρόβλεψη του υποδικτύου. Ωστόσο, ο καινούριος διευθυντής προκειμένου να μειώσει το κόστος αυτής της διαδικασίας, αποφάσισε ότι το δίκτυο που θα επιλέγεται θα είναι υποχρεωτικά ελάχιστου κόστους. Μία συμμορία ληστών, μαθαίνοντας την πληροφορία αυτή, αποφασίζει να αναλύσει το οδικό δίκτυο της πόλης και να προσδιορίσει με ακρίβεια τους πιθανούς δρόμους που θα χρησιμοποιήσει η χρηματοπιστωτική.

Η συμμορία σας προσφέρει σημαντική αμοιβή για ένα πρόγραμμα που θα βρίσκει ποιοι δρόμοι θα χρησιμοποιηθούν σίγουρα για χρηματοπιστωτικές, ποιοι σίγουρα όχι και ποιοι είναι αβέβαιοι.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και M που αντιστοιχούν στο πλήθος των κόμβων και στο πλήθος των δρόμων του δικτύου. Οι κόμβοι του δικτύου αριθμούνται από 1 μέχρι N . Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα υπάρχουν τρεις φυσικοί αριθμοί a_e, b_e, c_e που δηλώνουν ότι ο δρόμος $e = \{a_e, b_e\}$ έχει κόστος c_e . Το δίκτυο είναι μη κατευθυνόμενο, θα είναι συνεκτικό και δεν θα περιέχει ανακυκλώσεις ή πολλαπλές ακμές.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output, σε τρεις διαδοχικές γραμμές, το πλήθος των ακμών που ανήκουν σε κάθε συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους, το πλήθος των ακμών που δεν ανήκουν σε κανένα συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους και το πλήθος των ακμών που ανήκουν σε κάποιο συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους, αλλά όχι σε όλα.

Περιορισμοί:	Παραδείγματα Εισόδου:	Παραδείγματα Εξόδου:
$2 \leq N \leq 50.000$	3 3	0
$N - 1 \leq M \leq 500.000$	1 2 1	0
$1 \leq c_e \leq 200$	1 3 1	3
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	2 3 1	
Όριο μνήμης: 64 MB.	3 3	2
Στο 60% των αρχείων, θα υπάρχουν το πολύ 500 ακμές ίδιου βάρους.	1 2 1	1
	1 3 1	0
	2 3 2	