Παραδείγματα Αναγωγών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

ΣΗΜΜΥ

27 Φεβρουαρίου 2014

MAXSAT

- Είσοδος: Λογική Πρόταση σε CNF μορφή και φυσικός αριθμός K

MAXSAT

- Είσοδος: Λογική Πρόταση σε CNF μορφή και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Μπορούν να ικανοποιηθούν $\geq K$ clauses;

MAXSAT

- Είσοδος: Λογική Πρόταση σε CNF μορφή και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Μπορούν να ικανοποιηθούν $\geq K$ clauses;

Θεώρημα

Το MAXSAT είναι NP-Complete

MAXSAT

- Είσοδος: Λογική Πρόταση σε CNF μορφή και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Μπορούν να ικανοποιηθούν $\geq K$ clauses;

Θεώρημα

Το MAXSAT είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Ανάθεση αληθοτιμών στις μεταβλητές. Άρα MAXSAT$\in$ NP

MAXSAT

- Είσοδος: Λογική Πρόταση σε CNF μορφή και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Μπορούν να ικανοποιηθούν $\geq K$ clauses;

Θεώρημα

Το MAXSAT είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Ανάθεση αληθοτιμών στις μεταβλητές. Άρα MAXSAT$\in$ NP
- MAXSAT γενίκευση SAT

HAMILTON PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G

HAMILTON PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G
- Ερώτηση: Υπάρχει μονοπάτι που καλύπτει όλες τις κορυφές(HP);

HAMILTON PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G
- Ερώτηση: Υπάρχει μονοπάτι που καλύπτει όλες τις κορυφές(HP);

Θεώρημα

Το HAMILTON PATH είναι NP-Complete

HAMILTON PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G
- Ερώτηση: Υπάρχει μονοπάτι που καλύπτει όλες τις κορυφές(HP);

Θεώρημα

Το HAMILTON PATH είναι NP-Complete

Απόδειξη

HAMILTON PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G
- Ερώτηση: Υπάρχει μονοπάτι που καλύπτει όλες τις κορυφές(HP);

Θεώρημα

Το HAMILTON PATH είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Hamilton Path. Άρα HP$\in NP$

HAMILTON PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G
- Ερώτηση: Υπάρχει μονοπάτι που καλύπτει όλες τις κορυφές(HP);

Θεώρημα

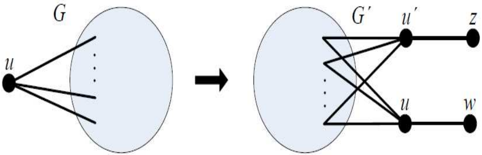
Το HAMILTON PATH είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Hamilton Path. Άρα HP$\in NP$
- HAMILTON CYCLE $\leq$ HAMILTON PATH

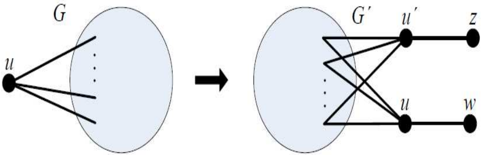
HAMILTON PATH reduction

Σχήμα: Reduction



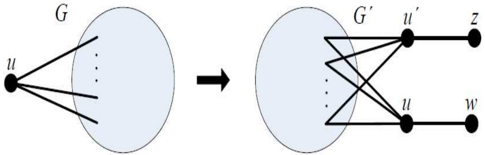
HAMILTON PATH reduction

Σχήμα: Reduction



HAMILTON PATH reduction

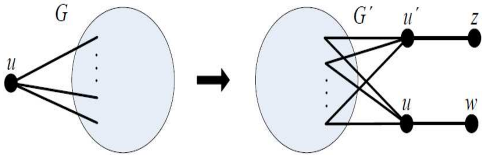
Σχήμα: Reduction



- Αν έχουμε HC:u-y-P-x-u, τότε έχουμε HP w-u-y-P-x-u'-z

HAMILTON PATH reduction

Σχήμα: Reduction



- Αν έχουμε HC:u-y-P-x-u, τότε έχουμε HP w-u-y-P-x-u'-z
- Αν έχουμε HP τότε θα είναι της μορφής w-u-y-P'-x-u'-z. Άρα ο HC u-y-P'-x-u

Min Leaf Spanning Tree

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K, $2 \leq K \leq |V|$

Min Leaf Spanning Tree

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K, $2 \leq K \leq |V|$
- Ερώτηση: Έχει το G συνδετικό δέντρο με K ή λιγότερα φύλλα;

Min Leaf Spanning Tree

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K, $2 \leq K \leq |V|$
- Ερώτηση: Έχει το G συνδετικό δέντρο με K ή λιγότερα φύλλα;

Θεώρημα

Το MLST είναι NP-Complete

Min Leaf Spanning Tree

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K, $2 \leq K \leq |V|$
- Ερώτηση: Έχει το G συνδετικό δέντρο με K ή λιγότερα φύλλα;

Θεώρημα

Το MLST είναι NP-Complete

Απόδειξη

Min Leaf Spanning Tree

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K, $2 \leq K \leq |V|$
- Ερώτηση: Έχει το G συνδετικό δέντρο με K ή λιγότερα φύλλα;

Θεώρημα

Το MLST είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Το συνδετικό δέντρο. Άρα MLST$\in NP$

Min Leaf Spanning Tree

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K, $2 \leq K \leq |V|$
- Ερώτηση: Έχει το G συνδετικό δέντρο με K ή λιγότερα φύλλα;

Θεώρημα

Το MLST είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Το συνδετικό δέντρο. Άρα MLST$\in NP$
- MLST γενίκευση HP ($K = 2$)

LONGEST PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$

LONGEST PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$
- Ερώτηση: Υπάρχει στο G μονοπάτι τουλάχιστον $|V|/4$;

LONGEST PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$
- Ερώτηση: Υπάρχει στο G μονοπάτι τουλάχιστον $|V|/4$;

Θεώρημα

Το LONGEST PATH είναι NP-Complete

LONGEST PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$
- Ερώτηση: Υπάρχει στο G μονοπάτι τουλάχιστον $|V|/4$;

Θεώρημα

Το LONGEST PATH είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Το μονοπάτι. Άρα LONGEST PATH$\in NP$

LONGEST PATH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$
- Ερώτηση: Υπάρχει στο G μονοπάτι τουλάχιστον $|V|/4$;

Θεώρημα

Το LONGEST PATH είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Το μονοπάτι. Άρα LONGEST PATH$\in NP$
- HAMILTON PATH $\leq$ LONGEST PATH

Longest Path REDUCTION

Longest Path REDUCTION

- Προσθέτουμε σε κάθε κορυφή γείτονες βαθμού 1.

Longest Path REDUCTION

- Προσθέτουμε σε κάθε κορυφή γείτονες βαθμού 1.
- Αν έχουμε μονοπάτι *Hamilton* στο G, τότε θα υπάρχει μονοπάτι μήκους $|V| + 2$ στο G'

Longest Path REDUCTION

- Προσθέτουμε σε κάθε κορυφή γείτονες βαθμού 1.
- Αν έχουμε μονοπάτι *Hamilton* στο G, τότε θα υπάρχει μονοπάτι μήκους $|V| + 2$ στο G'
- Θέλουμε αυτό να είναι τουλάχιστον το $1/4$ του συνολικού αριθμού των κορυφών του G'

Longest Path REDUCTION

- Προσθέτουμε σε κάθε κορυφή γείτονες βαθμού 1.
- Αν έχουμε μονοπάτι *Hamilton* στο G, τότε θα υπάρχει μονοπάτι μήκους $|V| + 2$ στο G'
- Θέλουμε αυτό να είναι τουλάχιστον το $1/4$ του συνολικού αριθμού των κορυφών του G'
- Θα προσθέσουμε αρκετές καινούργιες κορυφές ώστε να έχουμε $|V'| = 4|V| + 8$

DENSE SUBGRAPH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικοί αριθμοί K, B

DENSE SUBGRAPH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικοί αριθμοί K, B
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $S \subset V$ ώστε το επαγόμενο υπογράφημα του G που ορίζεται απ' τις κορυφές του S να έχει τουλάχιστον B ακμές;

DENSE SUBGRAPH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικοί αριθμοί K, B
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $S \subset V$ ώστε το επαγόμενο υπογράφημα του G που ορίζεται απ' τις κορυφές του S να έχει τουλάχιστον B ακμές;

Θεώρημα

Το DS είναι NP-Complete

DENSE SUBGRAPH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ και φυσικοί αριθμοί K, B
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $S \subset V$ ώστε το επαγόμενο υπογράφημα του G που ορίζεται απ' τις κορυφές του S να έχει τουλάχιστον B ακμές;

Θεώρημα

Το DS είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Το S. Άρα DS$\in NP$

DENSE SUBGRAPH

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικοί αριθμοί K, B
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $S \subset V$ ώστε το επαγόμενο υπογράφημα του G που ορίζεται απ' τις κορυφές του S να έχει τουλάχιστον B ακμές;

Θεώρημα

Το DS είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Το S. Άρα DS$\in NP$
- DS γενίκευση του Clique ($B = \frac{K(K-1)}{2}$)

FEEDBACK VERTEX SET - UNDIRECTED

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο κορυφών ανάδρασης με K ή λιγότερες κορυφές;

FEEDBACK VERTEX SET - UNDIRECTED

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο κορυφών ανάδρασης με Κ ή λιγότερες κορυφές;
- **Σύνολο κορυφών ανάδρασης**: είναι υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που αν αφαιρεθούν κάνουν το γράφημα ακυκλικό.

Θεώρημα

Το FVC-U είναι NP-Complete

FEEDBACK VERTEX SET - UNDIRECTED

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο κορυφών ανάδρασης με K ή λιγότερες κορυφές;
- **Σύνολο κορυφών ανάδρασης**: είναι υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που αν αφαιρεθούν κάνουν το γράφημα ακυκλικό.

Θεώρημα

Το FVC-U είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Σύνολο κορυφών ανάδρασης. Άρα FVC-U$\in NP$

FEEDBACK VERTEX SET - UNDIRECTED

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο κορυφών ανάδρασης με K ή λιγότερες κορυφές;
- **Σύνολο κορυφών ανάδρασης**: είναι υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος που αν αφαιρεθούν κάνουν το γράφημα ακυκλικό.

Θεώρημα

Το FVC-U είναι NP-Complete

Απόδειξη

- Πιστοποιητικό: Σύνολο κορυφών ανάδρασης. Άρα FVC-U$\in$ *NP*
- VERTEX COVER $\leq$ FVC-U

FVC-U reduction

VERTEX COVER

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K

FVC-U reduction

VERTEX COVER

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο κορυφών που καλύπτουν όλες τις ακμές με K ή λιγότερες κορυφές;

FVC-U reduction

VERTEX COVER

- Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός K
- Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο κορυφών που καλύπτουν όλες τις ακμές με K ή λιγότερες κορυφές;

Σχήμα: Reduction