

Συντομότερες Διαδρομές

Δημήτρης Φωτάκης

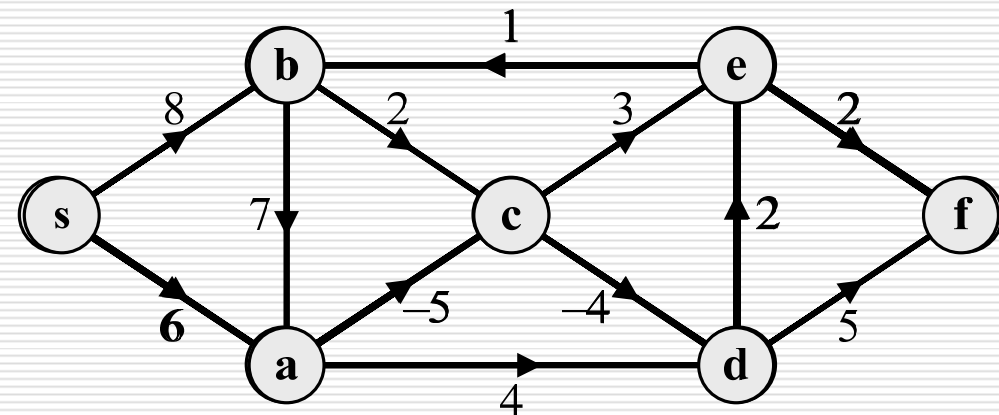
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



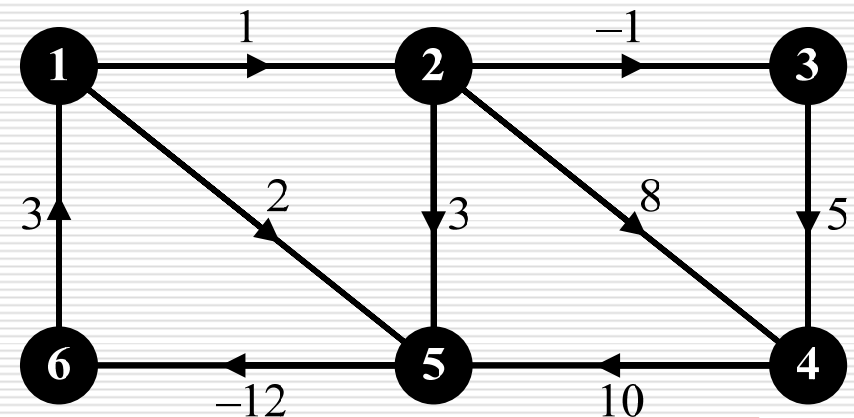
Συντομότερη Διαδρομή

- Κατευθυνόμενο $G(V, E, w)$ με μήκη $w : E \mapsto \mathbb{R}$
 - Μήκος διαδρομής $p = (v_0, v_1, \dots, v_k) : w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$
 - Απόσταση $d(u, v)$: μήκος συντομότερης $u - v$ διαδρομής.
 - Αν δεν υπάρχει $u - v$ διαδρομή, $d(u, v) = \infty$.
- Ζητούμενο: αποστάσεις και συντομότερες διαδρομές από **αρχική κορυφή** s προς **όλες** τις κορυφές.
 - Θεμελιώδες πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.



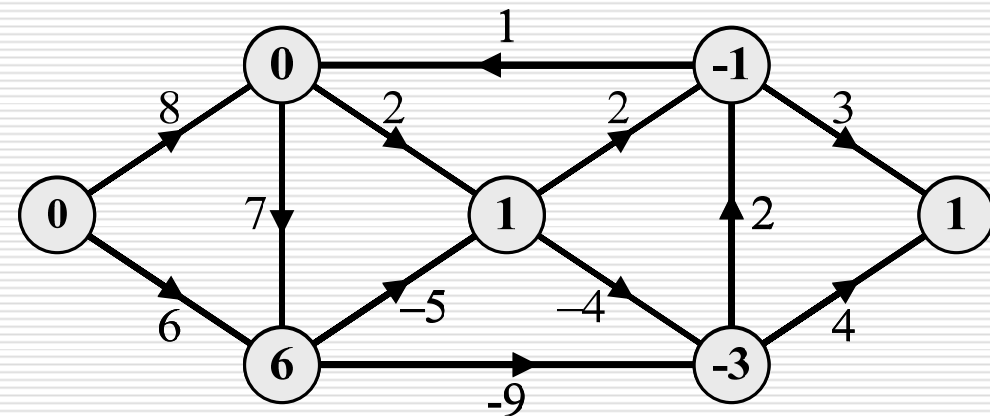
Κύκλοι Αρνητικού Μήκους

- **Διαδρομή**: ακολ. κορυφών όπου διαδοχικές συνδέονται με ακμή.
- **Μονοκονδυλιά**: διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές.
- **(Απλό) μονοπάτι**: διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.
 - Υπάρχει διαδρομή $u - v$ αν υπάρχει **μονοπάτι** $u - v$.
- **Συντομότερη** διαδρομή είναι **μονοπάτι** εκτός αν...
 - Υπάρχει **κύκλος αρνητικού μήκους**!
 - Αποστάσεις **δεν ορίζονται** γιατί συνολικό μήκος διαδρομής μπορεί να **μειώνεται επ' άπειρο**!
 - Κύκλος αρνητικού μήκους σε κάποια $u - v$ διαδρομή $\Rightarrow d(u, v) = -\infty$.



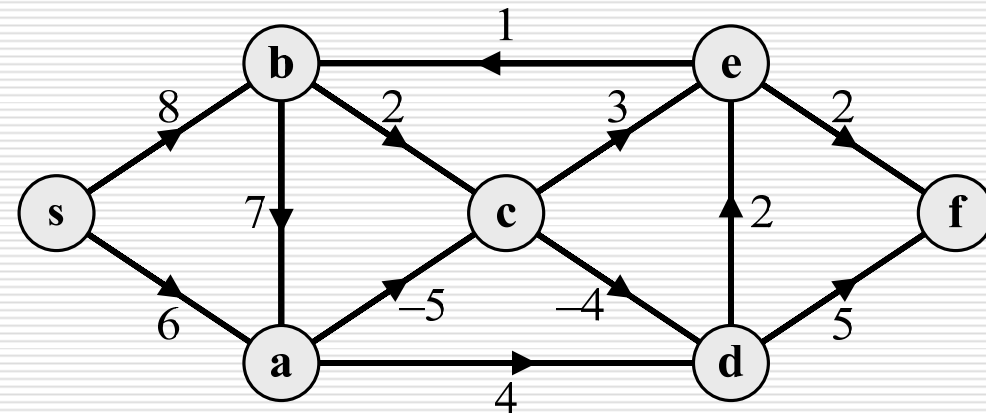
Συντομότερα Μονοπάτια

- Αν $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ είναι **συντομότερο** μονοπάτι, **κάθε** $v_i - v_j$ τμήμα του αποτελεί **συντομότερο** $v_i - v_j$ μονοπάτι.
 - Αρχή **βελτιστότητας**.
- Συντομότερα μονοπάτια από s προς όλες τις κορυφές:
Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών (SPT, ΔΣΜ).
 - Αν συντομότερα $s - v_1$ και $s - v_2$ μονοπάτια έχουν **κοινή** κορυφή u , χρησιμοποιούν (**ίδιο**) **συντομότερο** $s - u$ μονοπάτι.
 - ΔΣΜ αναπαρίσταται με **πίνακα γονέων**.



Συντομότερα Μονοπάτια

- Ταυτίζεται ΔΣΜ με ΕΣΔ;
- Έστω συντομότερα μονοπάτια από s σε $G(V, E, w)$.
 - Τι συμβαίνει σε $G(V, E, kw)$, $k > 0$;
 - Τι συμβαίνει σε $G(V, E, kw)$, $k < 0$;
 - Τι συμβαίνει σε $G(V, E, w+k)$, $k > 0$;



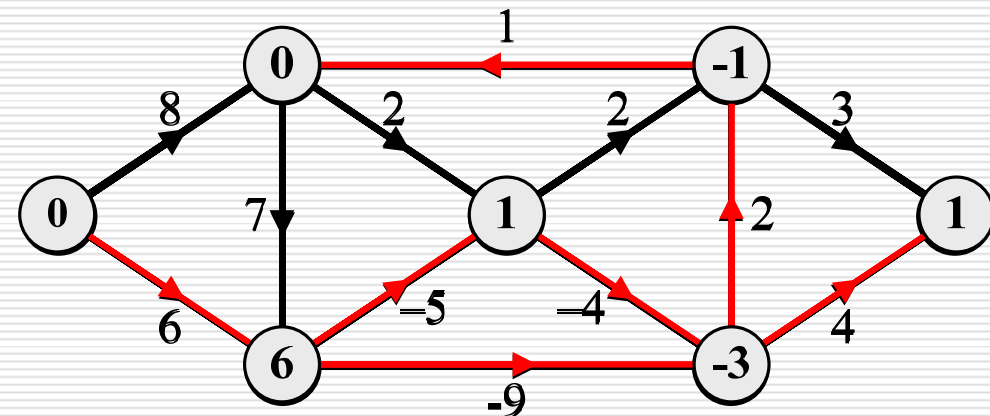
Αποστάσεις

- Αποστάσεις ικανοποιούν την «τριγωνική ανισότητα»:

$$\forall (v, u) \in E, d(s, u) \leq d(s, v) + w(v, u)$$

$$\forall v, u \in V, d(s, u) \leq d(s, v) + d(v, u)$$

- Ισότητα ισχύει ανν συντ. $s - u$ μονοπάτι περιέχει ακμή (v, u) (αντίστοιχα, διέρχεται από κορυφή v).



Υπολογισμός Συντομότερων Μονοπατιών

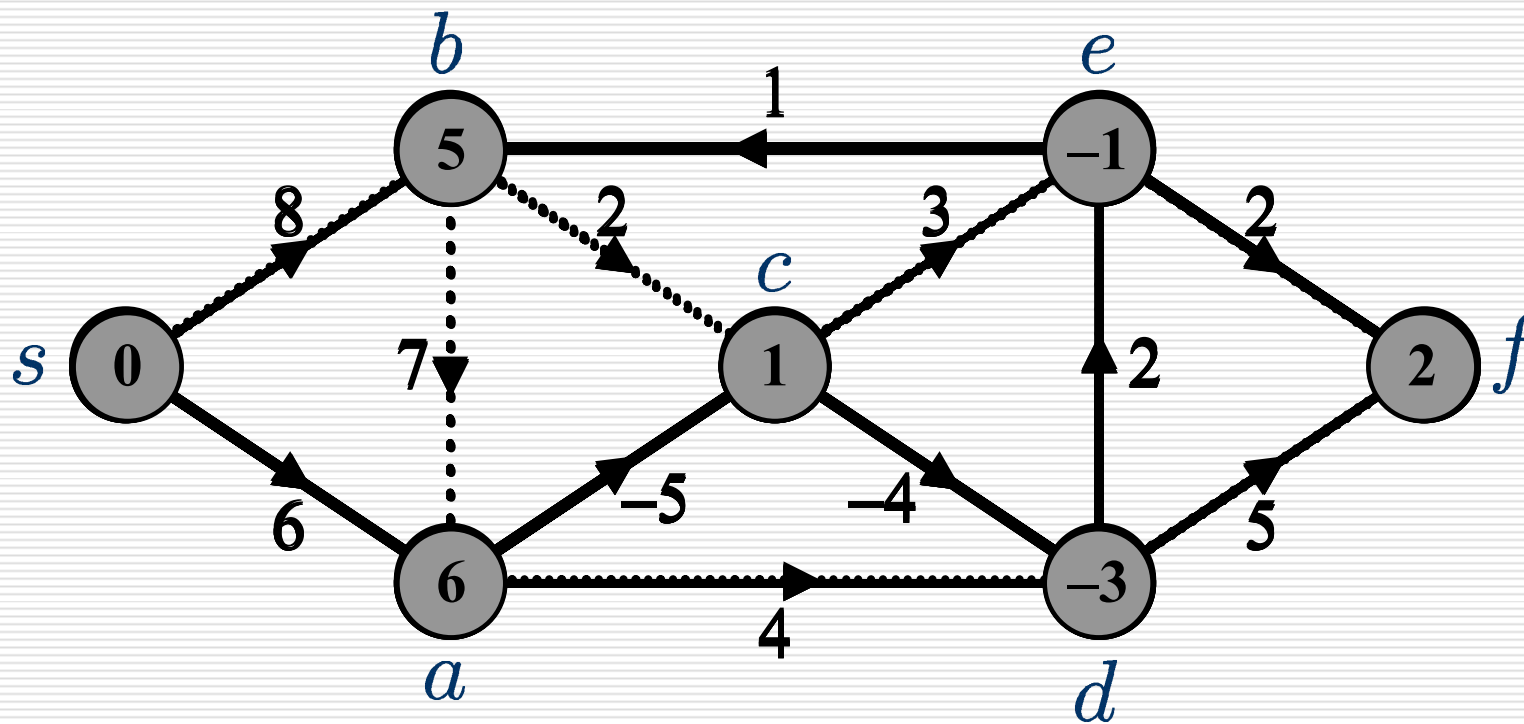
- Διατηρούμε «απαισιόδοξη» εκτίμηση $D[u]$ για $d(s, u)$.
 - Αρχικά: $D[s] = 0$ και $D[u] = \infty \quad \forall u \in V \setminus \{s\}$
 $p[u] = \text{NULL} \quad \forall u \in V$
 - Αλγόριθμος εξετάζει ακμές (v, u) και αναπροσαρμόζει $D[u]$.
Αν $D[u] > D[v] + w(v, u)$, τότε $D[u] \leftarrow D[v] + w(v, u)$
 $p[u] \leftarrow v$
- $D[u]$ = μήκος συντομότερου γνωστού $s - u$ μονοπατιού.
 - Επαγωγικά: αν ισχύει πριν τελευταία εξέταση ακμής (v, u) , ισχύει και μετά αφού $D[u] \leftarrow \min\{D[u], D[v] + w(v, u)\}$
 - Πάντα $D[u] \geq d(s, u)$, και $D[u] = \infty$ αν $\nexists s - u$ μονοπάτι.
 - Όταν ακμές συντομότερου $s - v$ μονοπατ. εξεταστούν με τη σειρά, γίνεται $D[u] = d(s, u)$ και δεν μειώνεται στο μέλλον.
- Συστηματική εξέταση ακμών και κριτήριο τερματισμού.

Αλγόριθμος Bellman-Ford

- «Απαισιόδοξη» εκτίμηση $D[u]$.
 - Τέλος κάθε φάσης i ,
 $D[u] \leq D[u, i]$
- Σε φάση $i = 1, \dots, n-1$, κάθε ακμή εξετάζεται μία φορά.
- Επιπλέον φάση για έλεγχο ύπαρξης κύκλου αρνητικού μήκος.
- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(nm)$.

```
Bellman-Ford( $G(V, E, w), s$ )
  for all  $u \in V$  do
     $D[u] \leftarrow \infty$ ;  $p[u] \leftarrow \text{NULL}$ ;
   $D[s] \leftarrow 0$ ;
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
    for all  $(v, u) \in E$  do
      if  $D[u] > D[v] + w(v, u)$  then
         $D[u] \leftarrow D[v] + w(v, u)$ ;
         $p[u] \leftarrow v$ ;
  for all  $(v, u) \in E$  do
    if  $D[u] > D[v] + w(v, u)$  then
      return(NEG-CYCLE);
```


Αλγ. Bellman-Ford: Παράδειγμα



Αλγ. Bellman-Ford ως DP

□ Ιδέα: δοκιμή **όλων των ακμών** σε **κάθε πιθανή θέση** για συντομότερο $s - u$ μονοπάτι (ταυτόχρονα για όλες τις u).

■ $D(u, i)$ = μήκος συντομότερου $s - u$ μονοπ. με $\leq i$ ακμές.

■ Αρχικά $D(s, 0) = 0$ και $D(u, 0) = \infty$ για κάθε $u \neq s$.

■ Από ΣΜ με $\leq i$ ακμές σε ΣΜ με $\leq i+1$ ακμές:

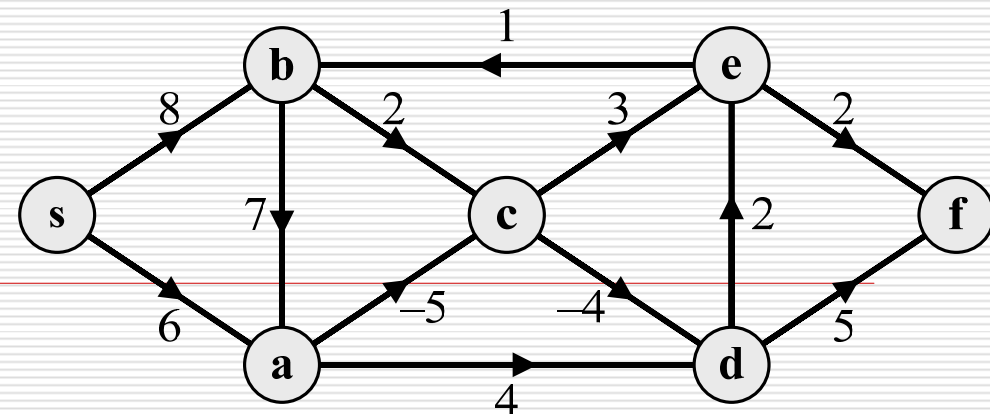
$$D(u, i + 1) = \min\{D(u, i), \min_{v:(v,u) \in E} \{D(v, i) + w(v, u)\}\}$$

■ (Απλό) μονοπάτι έχει $\leq n - 1$ ακμές $\Rightarrow D(u, n-1) = d(s, u)$
 $D(u, n) < D(u, n-1)$ ανν κύκλος αρνητικού μήκους.

■ Υπολογισμός τιμών $D(u, i)$,

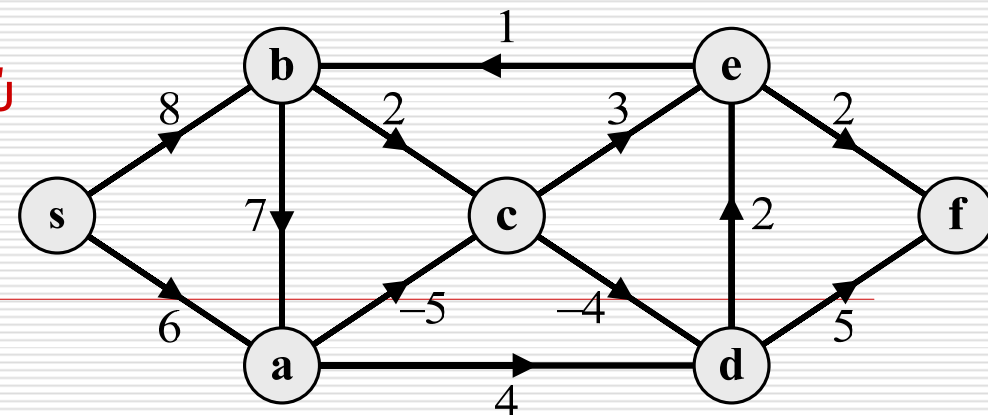
$u \in V, i = 1, \dots, n$, με

**δυναμικό
προγραμματισμό.**



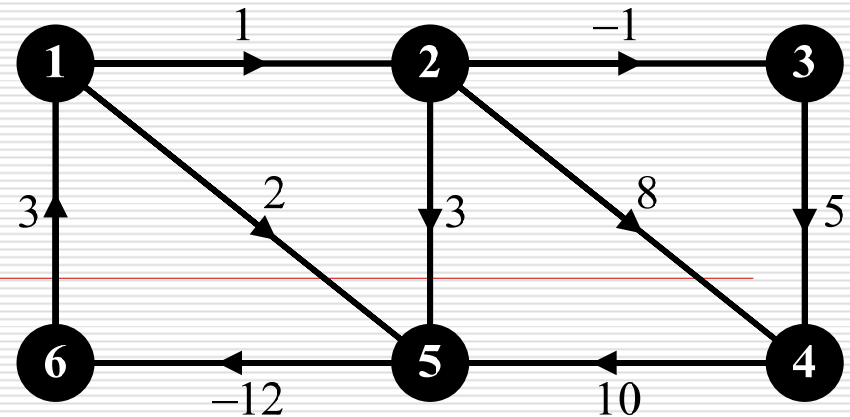
Αλγ. Bellman-Ford: Ορθότητα

- Αν **όχι κύκλος αρνητικού μήκους**, $D[u] = d(s, u)$ στο τέλος.
 - Συντομότερο $s - u$ μονοπάτι $s = v_0, v_1, \dots, v_k = u$ με k ακμές.
 - **Επαγωγική υπόθ.:** Τέλος φάσης $i-1$, $D[v_{i-1}] = d(s, v_{i-1})$.
 - Τέλος φάσης i : εξέταση ακμής (v_{i-1}, v_i) και $D[v_i] = d(s, v_i)$:
$$d(s, v_i) \leq D[v_i] \leq D[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$$
$$= d(s, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i) = d(s, v_i)$$
 - Τέλος φάσης $n - 1$: $D[u] = d(s, u)$ για κάθε κορυφή u .
 - $D[u]$ **δεν μειώνεται άλλο**, αφού πάντα $D[u] \geq d(s, u)$.
 - Αλγόριθμος **δεν επιστρέφει** ένδειξη για **κύκλο αρνητικού μήκους**.



Αλγ. Bellman-Ford: Ορθότητα

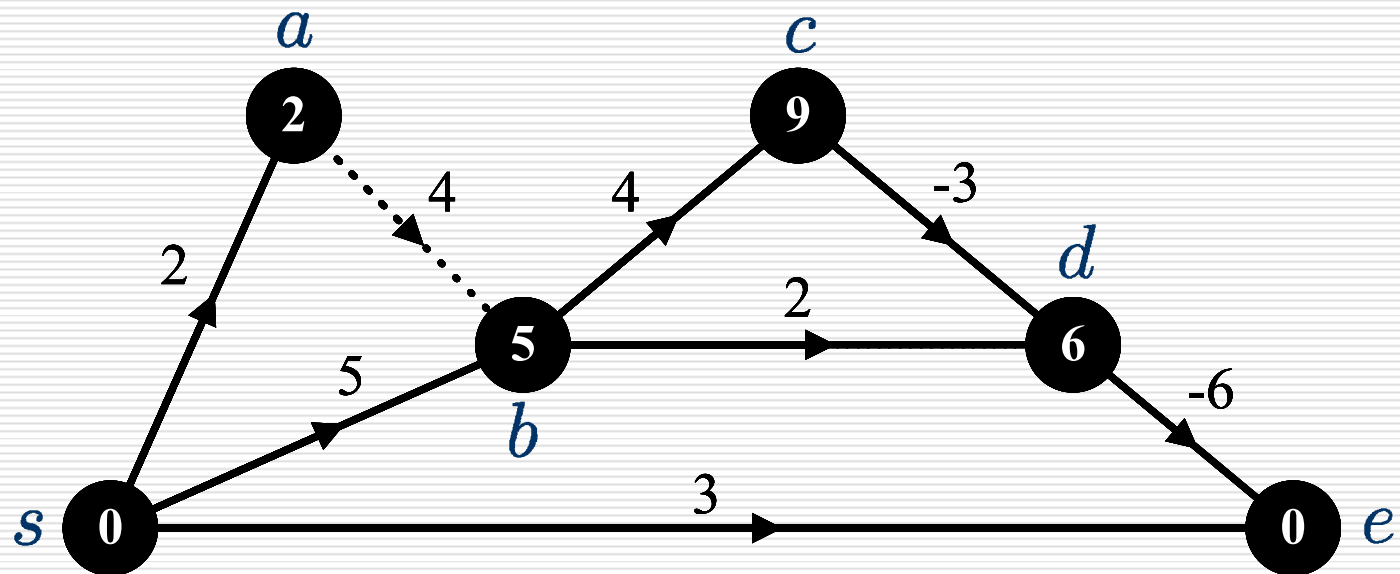
- Αν κύκλος αρνητικού μήκους, ένδειξη στο τέλος.
 - Έστω κύκλος αρνητικού μήκους $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k (= v_0)$ προσπελάσιμος από s .
 - Εκτιμήσεις $D[v_i]$ πεπερασμένες στο τέλος φάσης $n-1$.
 - Αν όχι ένδειξη, πρέπει στη φάση n για κάθε v_i στον κύκλο:
$$D[v_i] \leq D[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$$
 - Αθροίζοντας κατά μέλη:
$$\sum_{i=1}^k D[v_i] \leq \sum_{i=1}^k D[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) \geq 0$$
 - Άτοπο! Άρα ο αλγόριθμος επιστρέφει ένδειξη για κύκλο αρνητικού μήκους.



Συντομότερα Μονοπάτια σε DAG

- Σε DAG, σειρά εμφάνισης κορυφών σε κάθε μονοπάτι (άρα και ΔΣΜ) ακολουθεί τοπολογική διάταξη!
 - Έστω τοπολογική διάταξη $s = v_1, v_2, \dots, v_n$.
 - $d(s, v_k)$ εξαρτάται μόνο από $d(s, v_j)$ με $j < k$:
$$d(s, v_k) = \min_{v_j: (v_j, v_k) \in E} \{d(s, v_j) + w(v_j, v_k)\}$$
- Κορυφές εντάσσονται στο ΔΣΜ με σειρά τοπολογ. διάταξης και εξετάζονται εξερχόμενες ακμές τους (μια φορά κάθε ακμή!).
 - Ορθότητα με επαγωγή (παρόμοια με Bellman-Ford).
 - Επαγωγική υπόθ.: ακριβώς πριν την ένταξη του v_k στο ΔΣΜ, ισχύει ότι $D[v_j] = d(s, v_j)$ για κάθε $j = 0, \dots, k$.
 - Ακριβώς πριν ένταξη v_{k+1} στο ΔΣΜ, $D[v_{k+1}] = d(s, v_{k+1})$ αφού
$$D[v_{k+1}] = \min_{v_j: (v_j, v_{k+1}) \in E} \{D[v_j] + w(v_j, v_{k+1})\}$$

Παράδειγμα



Συντομότερα Μονοπάτια σε DAG

ShortestPath-DAG($G(V, E, w), v_1$)

Έστω τοπολογική διάταξη v_1, v_2, \dots, v_n ;

for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

$D[v_j] \leftarrow \infty$; $p[v_j] \leftarrow \text{NULL}$;

$D[v_1] \leftarrow 0$;

for $j \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

for all $(v_j, v_i) \in E$ **do**

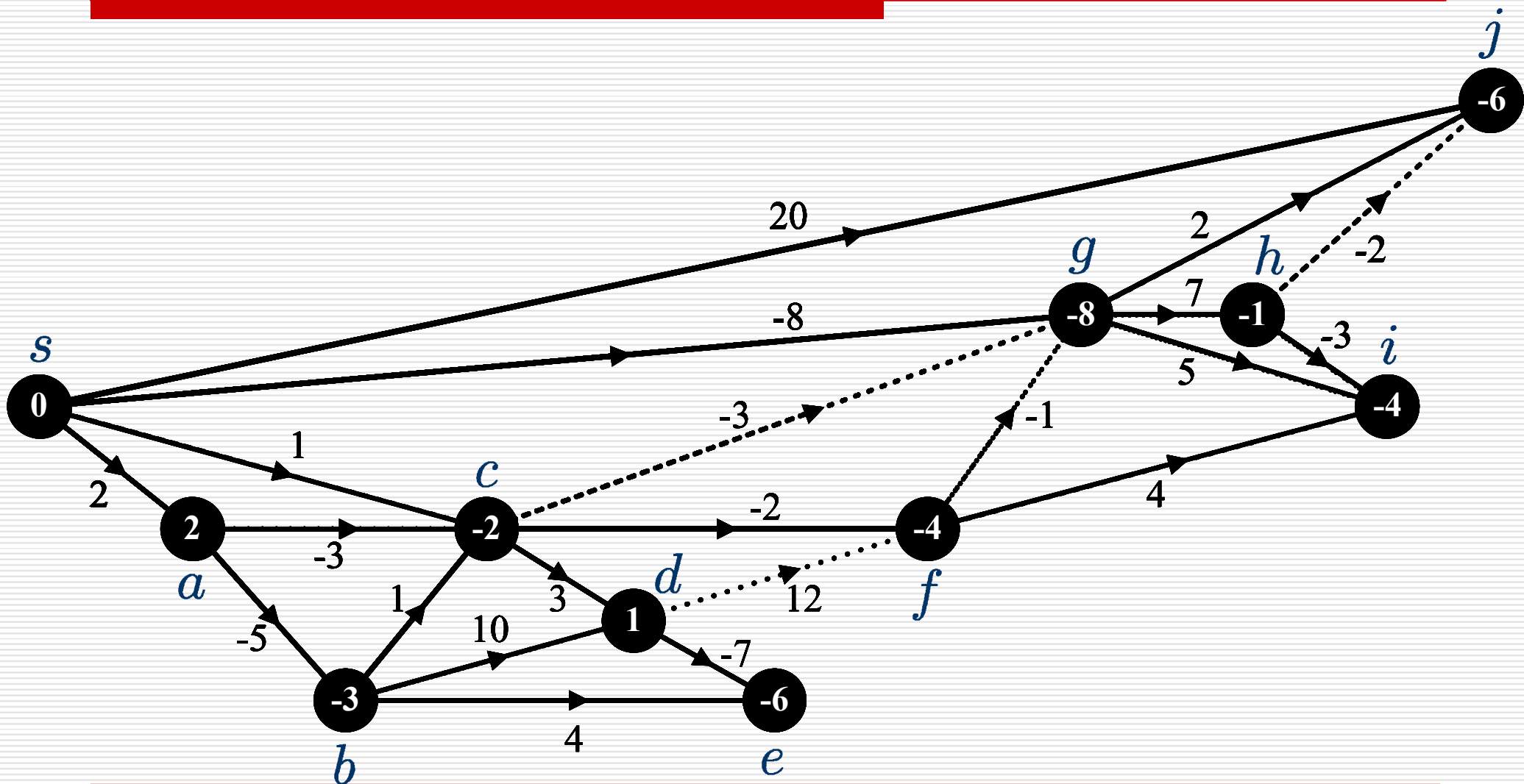
if $D[v_i] > D[v_j] + w(v_j, v_i)$ **then**

$D[v_i] \leftarrow D[v_j] + w(v_j, v_i)$;

$p[v_i] \leftarrow v_j$;

- Χρόνος εκτέλεσης: γραμμικός, $\Theta(n+m)$
- Χρησιμοποιείται και για υπολογισμό μακρύτερων μονοπατιών.
 - Αν $G(V, E, w)$ **ακυκλικό**, p μακρύτερο $s - u$ μονοπάτι ανν p συντομότερη $s - u$ διαδρομή στο $G(V, E, -w)$.

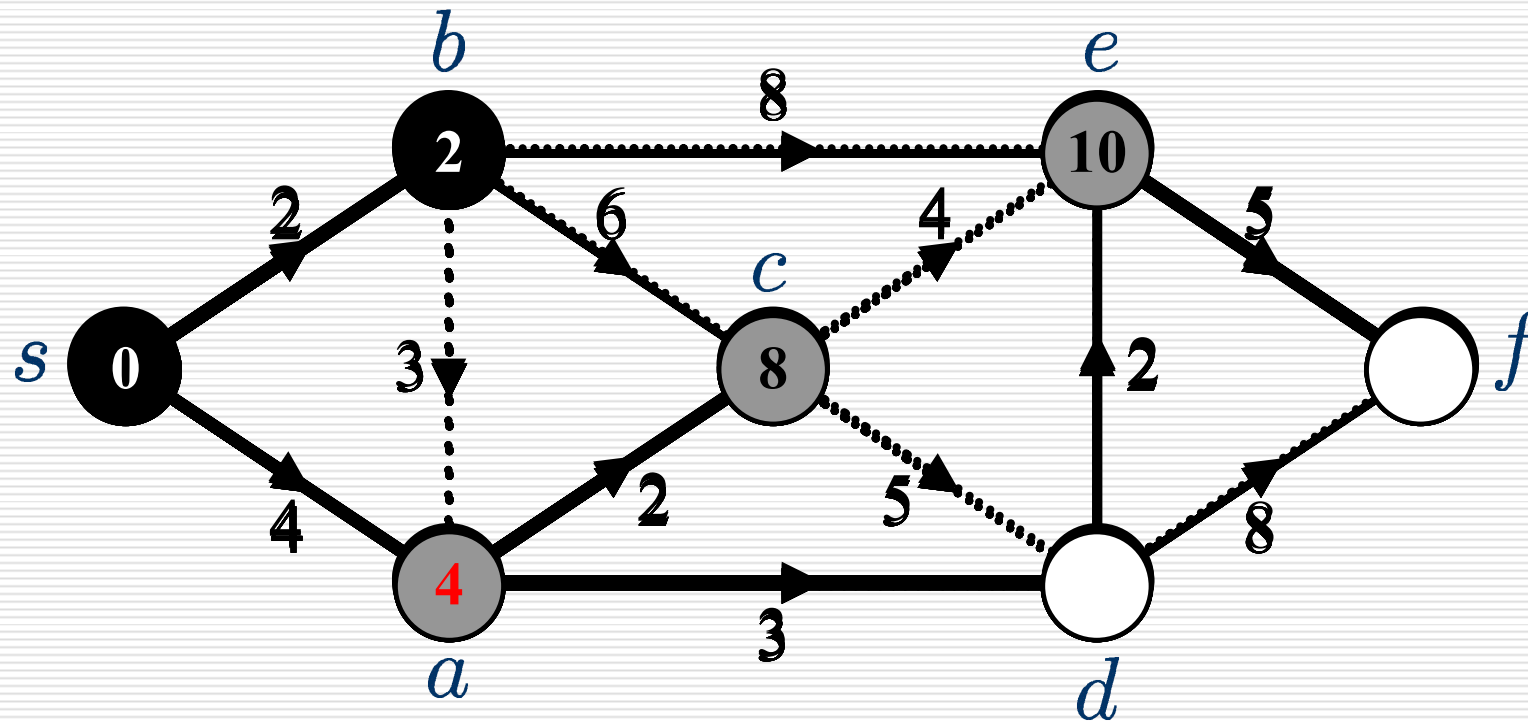
Παράδειγμα



Αλγόριθμος Dijkstra

- Ταχύτερα αν **όχι αρνητικά μήκη!** Αποτελεί **γενίκευση BFS**.
 - Ταχύτερα αν υπάρχει πληροφορία για **σειρά εμφάνισης κορυφών** σε **συντομότερα μονοπάτια** (και ΔΣΜ).
 - Μη αρνητικά μήκη: κορυφές σε **αύξουσα σειρά απόστασης**.
- Κορυφές εντάσσονται σε ΔΣΜ σε **αύξουσα απόσταση** και εξετάζονται **εξερχόμενες ακμές** τους (**μια φορά κάθε ακμή!**).
 - Αρχικά $D[s] = 0$ και $D[u] = \infty$ για κάθε $u \neq s$.
 - Κορυφή u εκτός ΔΣΜ με **ελάχιστο $D[u]$** εντάσσεται σε ΔΣΜ.
 - Για κάθε ακμή (u, v) , $D[v] \leftarrow \min\{D[v], D[u] + w(u, v)\}$
- **Ορθότητα:** όταν u εντάσσεται σε ΔΣΜ, $D[u] = d(s, u)$.
 - Μη αρνητικά μήκη: κορυφές v με **μεγαλύτερο $D[v]$** σε **μεγαλύτερη απόσταση** και **δεν επηρεάζουν $D[u]$** .

Αλγόριθμος Dijkstra: Παράδειγμα



Αλγόριθμος Dijkstra

□ Άπληστος αλγόριθμος.

□ **Υλοποίηση:**

- Ελάχιστο $D[v]$:
ουρά προτεραιότητας.
- Binary heap:
 $\Theta(m \log n)$
- Fibonacci heap:
 $\Theta(m + n \log n)$
- Ελάχιστο $D[v]$
γραμμικά: $\Theta(n^2)$.

Dijkstra($G(V, E, w), s$)

for all $u \in V$ **do**

$D[u] \leftarrow \infty$; $p[u] \leftarrow \text{NULL}$;

$D[s] \leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$;

while $|S| < |V|$ **do**

$u \notin S : D[u] = \min_{v \notin S} \{D[v]\}$;

$S \leftarrow S \cup \{u\}$;

for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**

if $D[v] > D[u] + w(u, v)$ **then**

$D[v] \leftarrow D[u] + w(u, v)$;

$p[v] \leftarrow u$;

Κάτι μου Θυμίζει ...;!

Dijkstra($G(V, E, w), s$)

for all $u \in V$ **do**

$D[u] \leftarrow \infty$; $p[u] \leftarrow \text{NULL}$;

$D[s] \leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$;

while $|S| < |V|$ **do**

$u \notin S : D[u] = \min_{v \notin S} \{D[v]\}$;

$S \leftarrow S \cup \{u\}$;

for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**

if $D[v] > D[u] + w(u, v)$ **then**

$D[v] \leftarrow D[u] + w(u, v)$;

$p[v] \leftarrow u$;

MST-Prim($G(V, E, w), s$)

for all $u \in V$ **do**

$c[u] \leftarrow \infty$; $p[u] \leftarrow \text{NULL}$;

$c[s] \leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$; $\Delta \leftarrow \emptyset$;

while $|S| < |V|$ **do**

$u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S} \{c[v]\}$;

$S \leftarrow S \cup \{u\}$;

for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**

if $v \notin S$ **and** $w(u, v) < c[v]$ **then**

$c[v] \leftarrow w(u, v)$;

$p[v] \leftarrow u$;

if $p[u] \neq \text{NULL}$ **then**

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\}$;

Αλγόριθμος Dijkstra: Εξέλιξη

- Απόσταση (και συντομότερο μονοπάτι) από s προς **κοντινότερη** (στην s), **2^η κοντινότερη** (στην s) κορυφή, κοκ.
- **Συντομότερα μονοπάτια** για κοντινότερες κορυφές, με υπολογισμένες αποστάσεις, σχηματίζουν **υποδέντρο του ΔΣΜ**.
- Επόμενη κοντινότερη (στην s) κορυφή είναι **συνοριακή** κορυφή.
 - **Συνοριακή κορυφή**: **δεν ανήκει** σε υποδέντρο ΔΣΜ και έχει **εισερχόμενη ακμή** από υποδέντρο.
- Εκτιμήσεις απόστασης συνοριακών κορυφών διατηρούνται σε **ουρά προτεραιότητας**.
- Συνοριακή κορυφή με **ελάχιστη εκτίμηση απόστασης** «βγαίνει» από ουρά προτεραιότητας και **προστίθεται** στο υποδέντρο.
 - **Εκτιμήσεις απόστασης** συνοριακών κορυφών ενημερώνονται με προσθήκη νέας κορυφής στο υποδέντρο (για εξερχόμενες ακμές της).

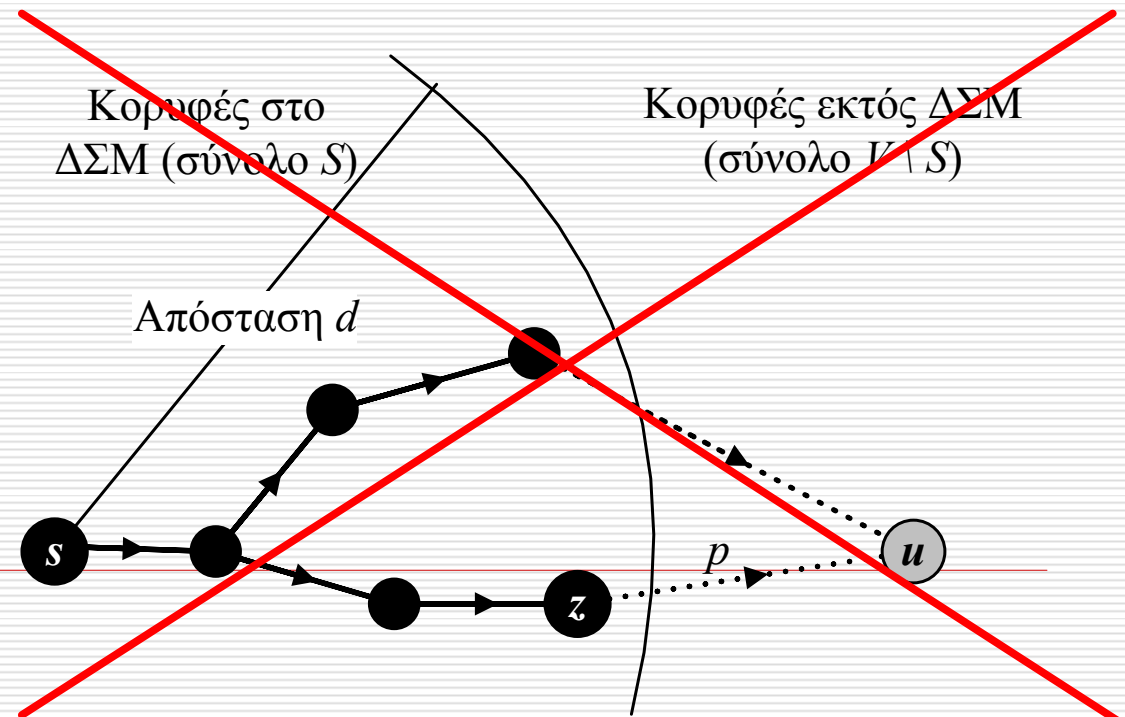
Αλγόριθμος Dijkstra: Ορθότητα

- Θ.δ.ο **όταν** κορυφή u εντάσσεται σε $\Delta\Sigma\text{M}$, $D[u] = d(s, u)$.
 - **Επαγωγή:** έστω $D[v] = d(s, v)$ για κάθε v ήδη στο $\Delta\Sigma\text{M}$.
 - u έχει **ελάχιστο** $D[u]$ (εκτός $\Delta\Sigma\text{M}$). Έστω ότι $D[u] > d(s, u)$.
 - p συντομότερο $s - u$ μονοπάτι με μήκος $d(s, u) < D[u]$, και z τελευταία κορυφή πριν u στο p :

Μπορεί z στο $\Delta\Sigma\text{M}$;

$$d(s, u) = d(s, z) + w(z, u) < D[u]$$
$$\Rightarrow z \notin S$$

Όχι!



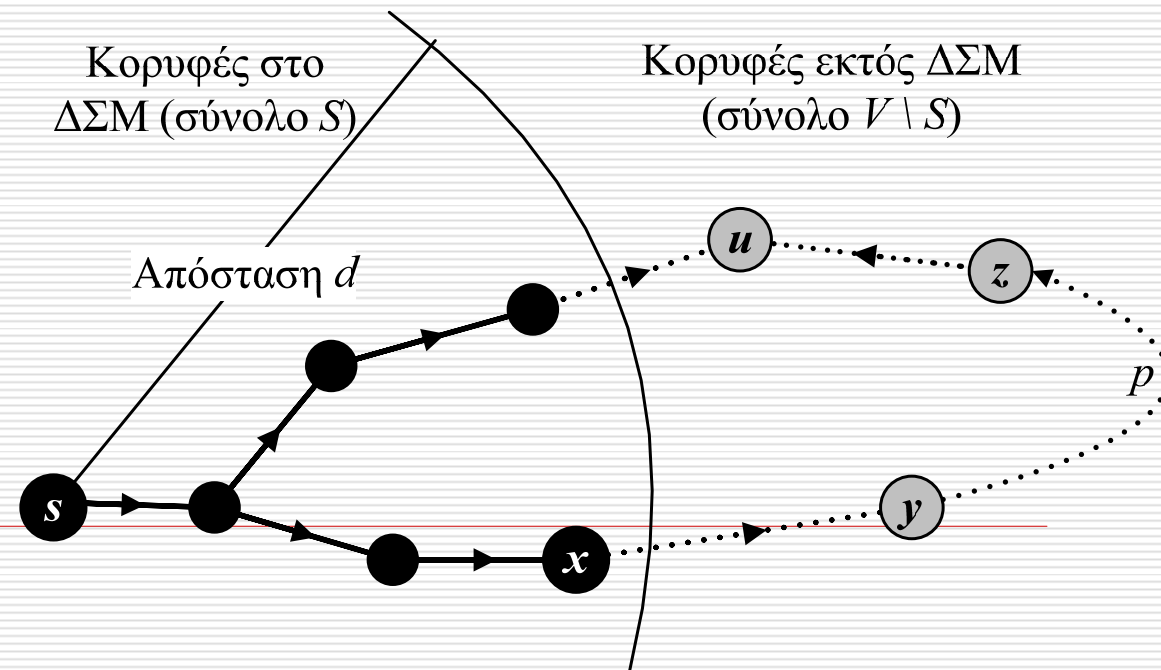
Αλγόριθμος Dijkstra: Ορθότητα

- Θ.δ.ο **όταν** κορυφή u εντάσσεται σε ΔΣΜ, $D[u] = d(s, u)$.
 - **Επαγωγή:** έστω $D[v] = d(s, v)$ για κάθε v ήδη στο ΔΣΜ.
 - u έχει **ελάχιστο** $D[u]$ (εκτός ΔΣΜ). Έστω ότι $D[u] > d(s, u)$.
 - p συντομότερο $s - u$ μονοπάτι με μήκος $d(s, u) < D[u]$, και z τελευταία κορυφή πριν u στο p :

Έστω $x (\neq z)$ τελευταία κορυφή του p στο ΔΣΜ και y (μπορεί $y = z$) επόμενη της x στο p .

$$\begin{aligned} D[y] &\leq D[x] + w(x, y) \\ &= d(s, x) + w(x, y) \\ &= d(s, y) < D[u] \end{aligned}$$

$\Rightarrow D[y] < D[u]$, **άτοπο!**



Dijkstra vs Bellman-Ford

- Αλγ. **Dijkstra** ταχύτερος κατά n αλλά **δεν** εφαρμόζεται για **αρνητικά** μήκη.
 - Βασίζεται στο ότι **αποστάσεις δεν μειώνονται** κατά μήκος συντομότερου μονοπατιού.
- Αλγ. **Bellman-Ford** εφαρμόζεται **για αρνητικά** μήκη.
 - Αποστάσεις **μπορεί να μειώνονται** κατά μήκος συντομότερου μονοπατιού.
 - «Τελευταία» κορυφή μπορεί σε μικρότερη απόσταση από αρχική.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

- Αρνητικά μήκη → προσθέτουμε μεγάλο αριθμό →
→ θετικά μήκη → αλγόριθμος Dijkstra;
- Νδο BFS υπολογίζει ΔΣΜ όταν ακμές μοναδιαίου μήκους.
- Όταν μη-αρνητικά μήκη, μπορεί ένα ΔΣΜ και ένα ΕΣΔ να μην έχουν **καμία κοινή ακμή**;
- **Bottleneck** Shortest Paths:
 - Κόστος μονοπατιού p : $c(p) = \max_{e \in p} \{w(e)\}$
 - Υπολογισμός ΔΣΜ για **bottleneck** κόστος;
 - **Τροποποίηση Dijkstra** λύνει Bottleneck Shortest Paths (ακόμη και για αρνητικά μήκη):
$$\forall (v, u) \in E, D[u] \leftarrow \min\{D[u], \max\{D[v], w(v, u)\}\}$$

Συντομότερα Μονοπάτια για Όλα τα Ζεύγη Κορυφών

- Υπολογισμός απόστασης $d(v, u)$ και συντομότερου $v - u$ μονοπατιού για κάθε ζεύγος $(v, u) \in V \times V$.
- Αλγόριθμος για ΣΜ από μία κορυφή για κάθε $s \in V$.
 - Αρνητικά μήκη: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n^2 m)$.
 - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n m + n^2 \log n)$.
- Αρνητικά μήκη: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
- Αναπαράσταση λύσης:
 - Αποστάσεις: πίνακας $D[1..n][1..n]$
 - Συντομότερα μονοπάτια: n ΔΣΜ, ένα για κάθε αρχική κορυφή.
 - Πίνακας $P[1..n][1..n]$: n πίνακες προγόνων.
 - Γραμμή $P[i]$: πίνακας προγόνων $\Delta\Sigma\text{M}(v_i)$.

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- Θεωρούμε **γράφημα** $G(V, E, w)$ με μήκη στις ακμές.
 - Καθορισμένη (αυθαίρετη) **αρίθμηση** κορυφών v_1, v_2, \dots, v_n .
- Αναπαράσταση γραφήματος με **πίνακα γειτνίασης**:

$$w(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & v_i = v_j \\ w(v_i, v_j) & v_i \neq v_j \ (v_i, v_j) \in E \\ \infty & v_i \neq v_j \ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

- Υπολογισμός απόστασης $d(v_i, v_j)$ από $d(v_i, v_k), d(v_k, v_j)$ για **όλα τα** $k \in V \setminus \{v_i, v_j\}$:

$$d(v_i, v_j) = \min\{w(v_i, v_j), \min_{v_k \in V \setminus \{v_i, v_j\}} \{d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)\}\}$$

- Φαύλος κύκλος($;$): $d(v_i, v_k) \rightarrow d(v_i, v_j)$ και $d(v_i, v_j) \rightarrow d(v_i, v_k)$
- **Δυναμικός προγραμματισμός**: υπολογισμός **όλων** με συστηματικό **bottom-up** τρόπο!

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

□ $D_k[v_i, v_j]$: μήκος συντομότερου $v_i - v_j$ μονοπατιού με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από $V_k = \{v_1, \dots, v_k\}$

■ Αρχικά $D_0[v_i, v_j] = w(v_i, v_j)$ γιατί $V_0 = \emptyset$.

■ Έστω ότι γνωρίζουμε $D_{k-1}[v_i, v_j]$ για όλα τα ζεύγη v_i, v_j .

■ $D_k[v_i, v_j]$ διέρχεται από v_k καμία ή μία φορά (μονοπάτι!):

$$D_k[v_i, v_j] = \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\}$$

■ Αναδρομική σχέση για D_0, D_1, \dots, D_n :

$$D_k[v_i, v_j] = \begin{cases} w(v_i, v_j) & k = 0 \\ \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\} & k = 1, \dots, n \end{cases}$$

■ Υπολογισμός D_n με **δυναμικό προγραμματισμό**.

■ Κύκλος αρνητικού μήκους αν $D_n[v_i, v_i] < 0$.

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- Τυπικός δυναμικός προγραμματισμός:

Χρόνος: $\Theta(n^3)$

Floyd-Warshall($G(V, E, w)$)

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

if $(v_i, v_j) \in E$ **then** $D_0[i, j] \leftarrow w(v_i, v_j)$;

else $D_0[i, j] \leftarrow \infty$;

$D_0[i, i] \leftarrow 0$;

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

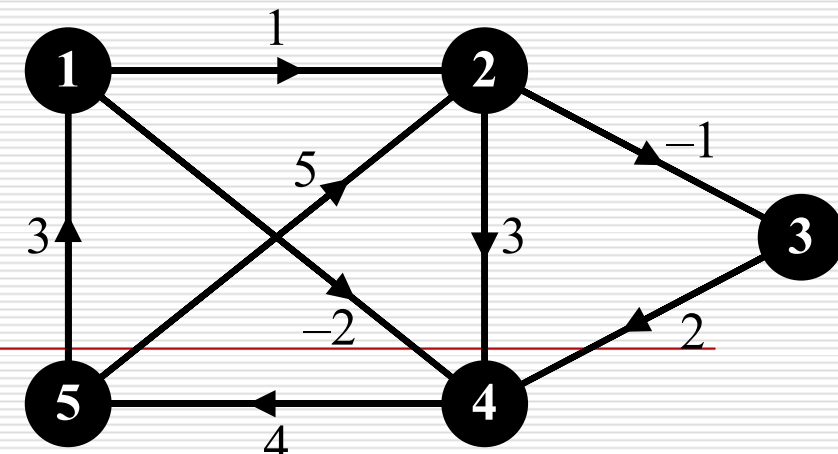
for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

if $D_{k-1}[i, j] > D_{k-1}[i, k] + D_{k-1}[k, j]$ **then**

$D_k[i, j] \leftarrow D_{k-1}[i, k] + D_{k-1}[k, j]$;

else $D_k[i, j] \leftarrow D_{k-1}[i, j]$;

Παράδειγμα



$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

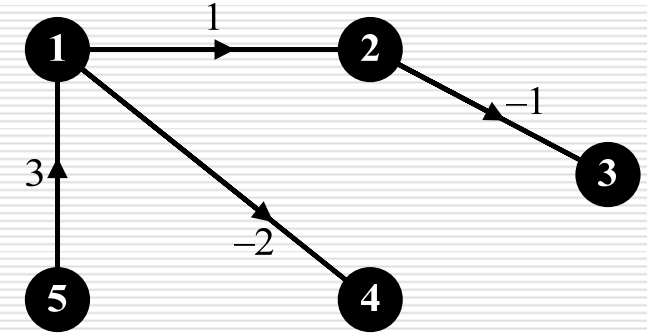
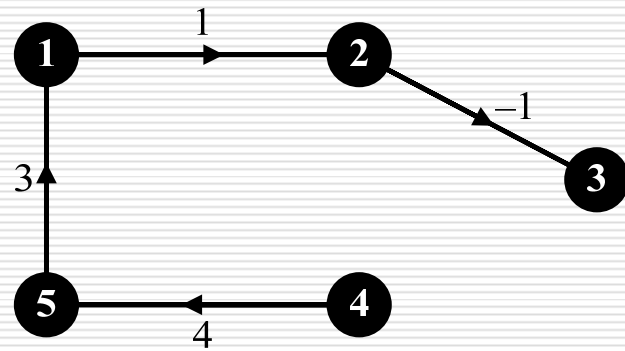
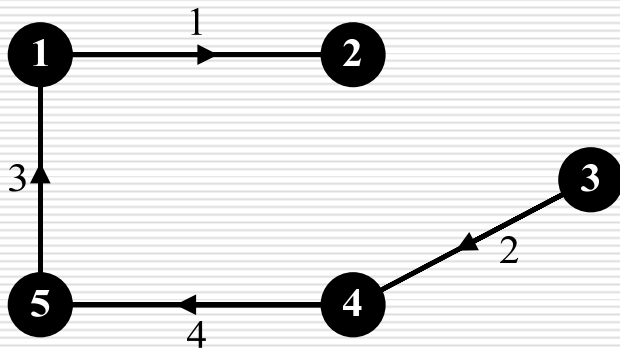
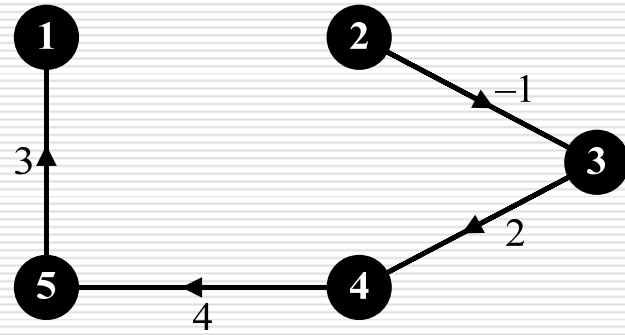
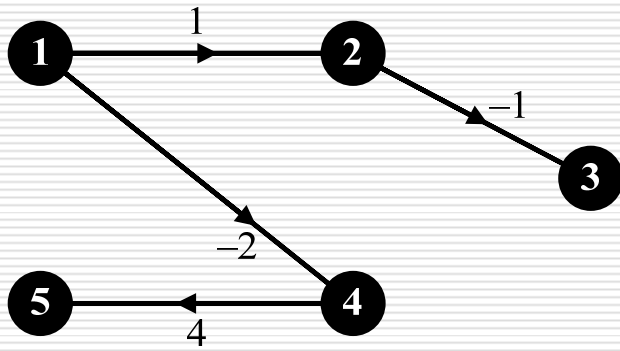
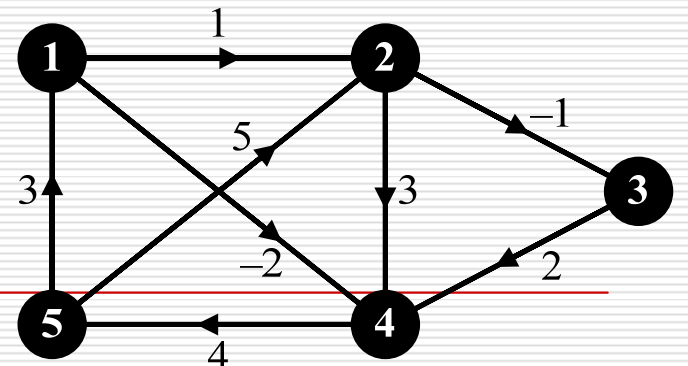
$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \infty & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 8 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 0 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός Συντομότερων Μονοπατιών

- $P_k[v_i, \cdot]$: ΔΣΜ(v_i) με **ενδιάμεσες** κορυφές μόνο από V_k .
 - Αποστάσεις $D_k[v_i, \cdot]$ αντιστοιχούν σε μονοπάτια $P_k[v_i, \cdot]$.
 - $P_k[v_i, v_j]$: προηγούμενη κορυφή της v_j στο **συντομότερο** $v_i - v_j$ μονοπάτι με **ενδιάμεσες** κορυφές μόνο από V_k .
- P_0 καθορίζεται από πίνακα γειτνίασης:
$$P_0[v_i, v_j] = \begin{cases} \text{NULL} & \text{αν } i = j \text{ ή } (v_i, v_j) \notin E \\ v_i & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$
- Αναδρομική σχέση για P_0, P_1, \dots, P_n :
$$P_k[v_i, v_j] = \begin{cases} P_{k-1}[v_i, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] \leq D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \\ P_{k-1}[v_k, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] > D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \end{cases}$$
 - Υπολογισμός P_n ταυτόχρονα με υπολογισμό D_n .
 - Εύκολη τροποποίηση προηγούμενης υλοποίησης.

Παράδειγμα



$$P_5 = \begin{pmatrix} \text{NULL} & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & \text{NULL} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & \text{NULL} & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & \text{NULL} & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & \text{NULL} \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος Johnson

- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών σε αραιά γραφήματα με αρνητικά μήκη:
 - **Μετατροπή** αρνητικών μηκών σε **μη αρνητικά** χωρίς να αλλάξουν τα συντομότερα μονοπάτια.
- Αλγόριθμος για γράφημα $G(V, E, w)$:
 - Νέα κορυφή s που συνδέεται με κάθε $u \in V$ με ακμή μηδενικού μήκους: $G'(V \cup \{s\}, E \cup \{(s, u)\}, w)$.
 - **Bellman-Ford** για G' με αρχική κορυφή s .
Έστω $h(u)$ απόσταση κορυφής $u \in V$ από s .
 - Αν όχι κύκλος αρνητικού μήκους, υπολόγισε **νέα** (μη αρνητικά) μήκη: $\hat{w}(v, u) = w(v, u) + h(v) - h(u), \forall (v, u) \in E$
 - Για κάθε $u \in V$, **Dijkstra** σε $G(V, E, \hat{w})$ με αρχική κορυφή u .

Αλγόριθμος Johnson

- Χρονική πολυπλοκότητα:
 - Bellman-Ford και n φορές Dijkstra: $\Theta(nm + n^2 \log n)$.
- Ορθότητα:
 - **Νέα μήκη μη αρνητικά:** $h(\cdot)$ αποστάσεις από s , και ισχύει ότι
$$\forall (v, u) \in E, h(u) \leq h(v) + w(v, u) \Rightarrow \hat{w}(v, u) \geq 0$$
 - Μεταβολή στα μήκη **δεν επηρεάζει** συντομότερα μονοπάτια.
 - Μήκος **κάθε** $a - \beta$ μονοπατιού μεταβάλλεται κατά $h(\beta) - h(a)$.
 - Έστω $p \equiv (a = v_0, v_1, \dots, v_k = \beta)$ οποιοδήποτε $a - \beta$ μονοπάτι.

$$\begin{aligned}\hat{\ell}(p) &= \sum_{i=0}^{k-1} \hat{w}(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} [w(v_i, v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1})] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) + h(v_0) - h(v_k) = \ell(p) + h(\alpha) - h(\beta)\end{aligned}$$

Σύνοψη

- Συντομότερα μονοπάτια από μία αρχική κορυφή s :
 - **Αρνητικά μήκη**: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n m)$.
 - Δυναμικός προγραμματισμός.
 - DAGs με αρνητικά μήκη σε χρόνο $\Theta(m + n)$.
 - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(m + n \log n)$.
 - (Προσαρμοστικός) άπληστος αλγόριθμος.
- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών:
 - **Αρνητικά μήκη**: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
 - Δυναμικός προγραμματισμός.
 - (Μη-)αρνητικά μήκη και **αραιά** γραφήματα, $m = o(n^2)$:
 - n φορές Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n m + n^2 \log n)$.
 - Αν αρνητικά μήκη, **αλγ. Johnson** για μετατροπή σε θετικά!