# Μέγιστη Ροή – Ελάχιστη Τομή

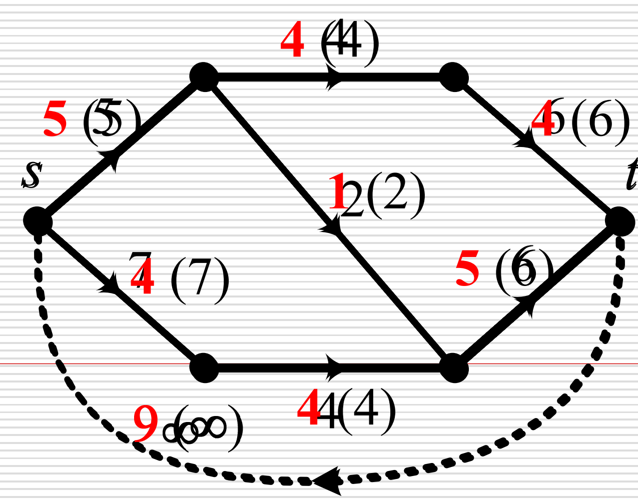

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Δίκτυα και Ροές

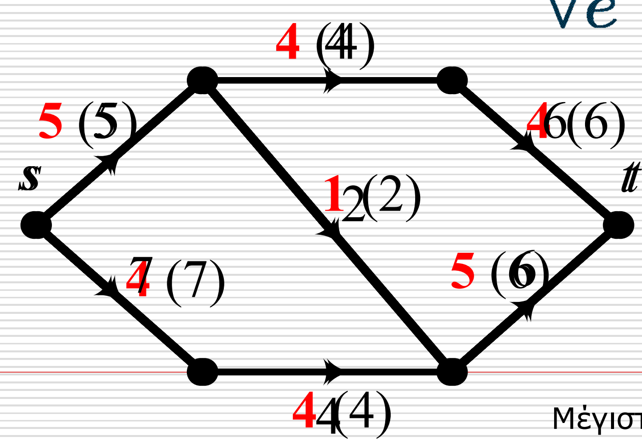
- **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.
  - Πηγή $s$, προορισμός $t$, χωρητικότητα ακμής $b_e$ .
- $s - t$ ροή μεγέθους $d$ : $f : E \mapsto \mathbb{R}_+$ :
  - Χωρητικότητα: $\forall e \in E \;\; f_e \leq b_e$
  - Διατήρηση ροής: $\forall v \in V \quad \sum_{e \in in(v)} f_e = \sum_{e \in out(v)} f_e$
  - Μέγεθος: $f_{ts} = d$



# Μέγιστη s – t Ροή

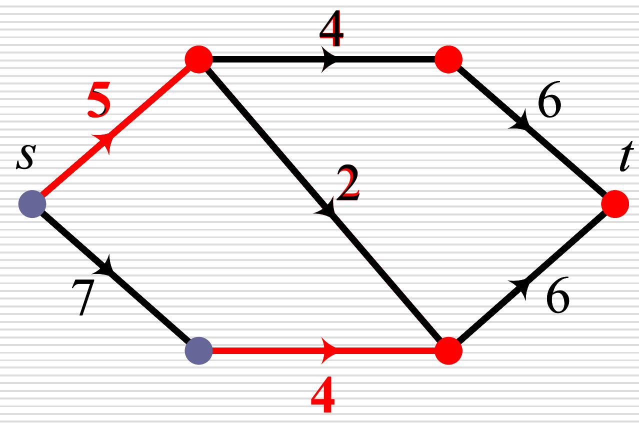
- Πρόβλημα Μέγιστης s – t Ροής (Max-Flow):
  - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε $s – t$ ροή με μέγιστη τιμή.

$$
\begin{array}{lll}
\max & f_{ts} & \\
\text{s.t.} & f_e \leq b_e & \forall e \in E \\
& \displaystyle\sum_{e \in in(v)} f_e - \sum_{e \in out(v)} f_e \leq 0 & \forall v \in V \\
& f_e \geq 0 & \forall e \in E
\end{array}
$$



# s – t Τομή

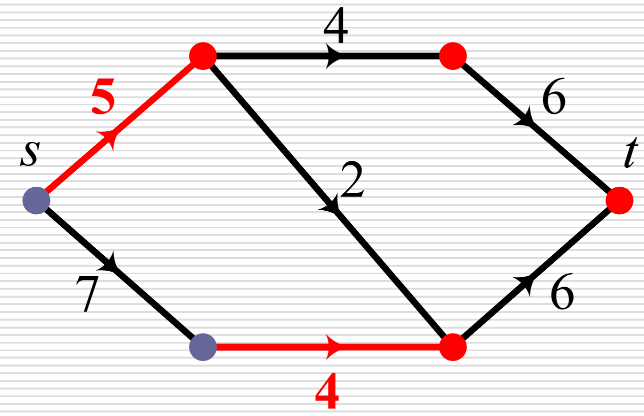
- *s – t* τομή χωρητικότητας *d* :
  - Διαμέριση $(S, V \setminus S)$ με $s \in S$ και $t \in V \setminus S$.
  - Χωρητικότητα $b(S, V \setminus S) = \sum_{(u,v):u\in S, v\notin S} b_{uv} = d$
  - Ακμές χωρητικότητας *d* που χωρίζουν s από t.



# Ελάχιστη s–t Τομή

- Πρόβλημα Ελάχιστης s – t Τομής (Min s–t Cut):
  - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε $s - t$ τομή με ελάχιστη χωρητικότητα.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} d_{uv} b_{uv} \\
\text{s.t.} \quad & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \qquad \forall (u,v) \in E \\
& p_s - p_t \geq 1 \\
& d_{uv}, p_v \geq 0
\end{aligned}
$$



# Ροές και Τομές

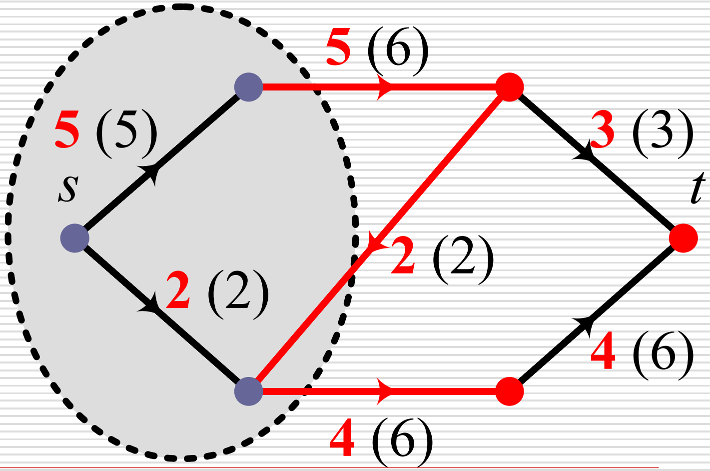
- Έστω ροή $f$ και τομή $(S, V \setminus S)$.

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v \in S, u \notin S} f_{vu} - \sum_{v \in S, u \notin S} f_{uv}$$

- Κάθε $s - t$ ροή $f$ και $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$:

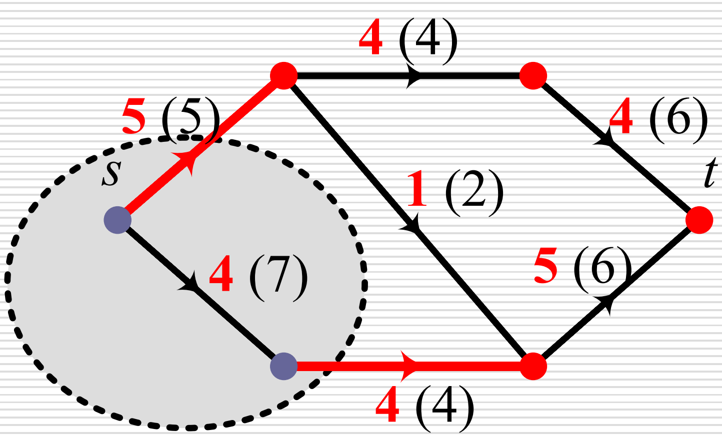
$$f_{ts} = f(S, V \setminus S) \leq b(S, V \setminus S)$$

- **Μέγιστη s – t ροή**
  **≤ ελάχιστη s – t τομή.**



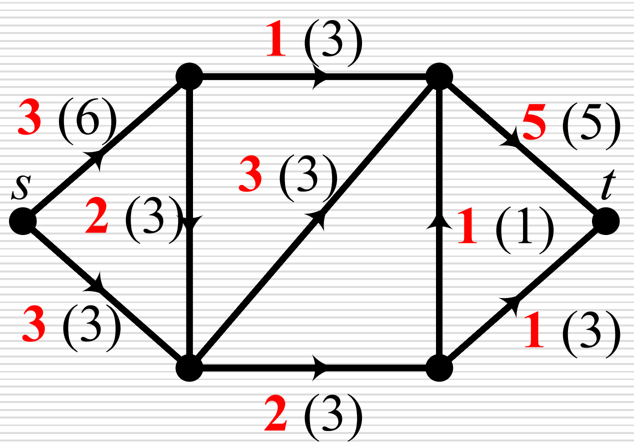
# Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή

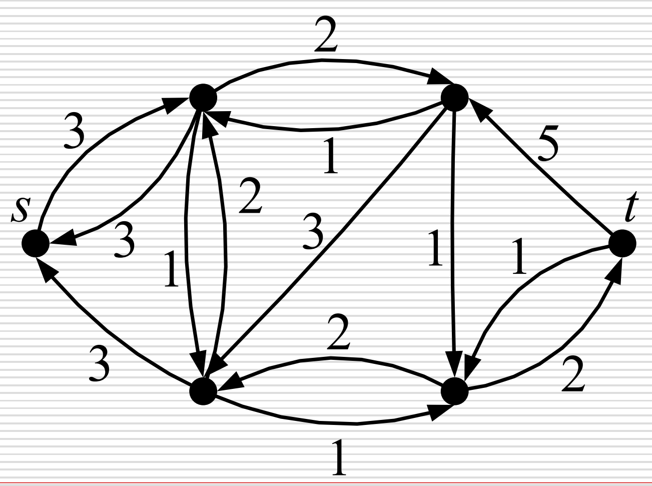
- **Μέγιστη s – t ροή = Ελάχιστη s – t τομή !**
  - Max-Flow – Min-Cut Θεώρημα.
  - Ακμές ελάχιστης τομής κορεσμένες σε μέγιστη ροή.
- Μέγιστη ροή, ελάχιστη τομή: συνεκτικότητα / μεταφορική ικανότητα δικτύου.



# Υπολειμματικό Δίκτυο

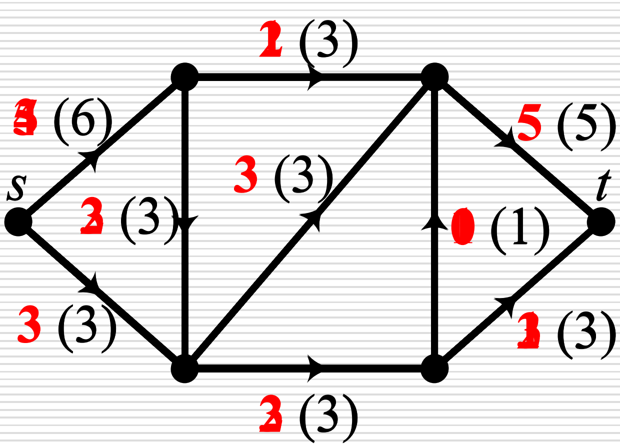
- Δίκτυο $G(V, E, b)$ και ροή $f$.
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$ :
  - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u,v) \in E \;\; r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
  - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u,v) \in E \;\; r_{vu} = f_{uv}$
- $s$ – $t$ μονοπάτι στο υπολειμματικό: επαυξητικό μονοπάτι.

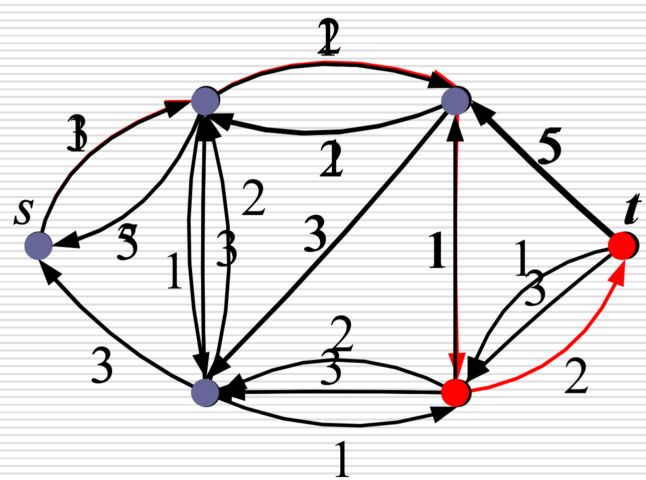


# Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

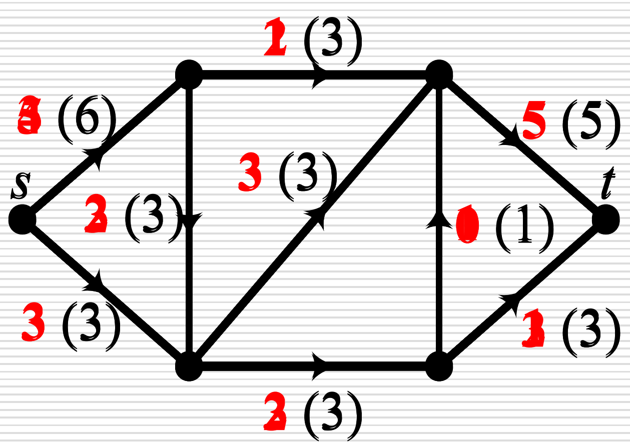
- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι ⇒ αύξηση ροής ⇒ όχι μέγιστη ροή.
- Όχι επαυξητικό μονοπάτι :
  - Κορυφές προσπελάσιμες από *s* ορίζουν τομή χωρητικότητας ίσης με ροή.
  - Μέγιστη ροή και ελάχιστη τομή λόγω Θ. Max-Flow-Min-Cut!

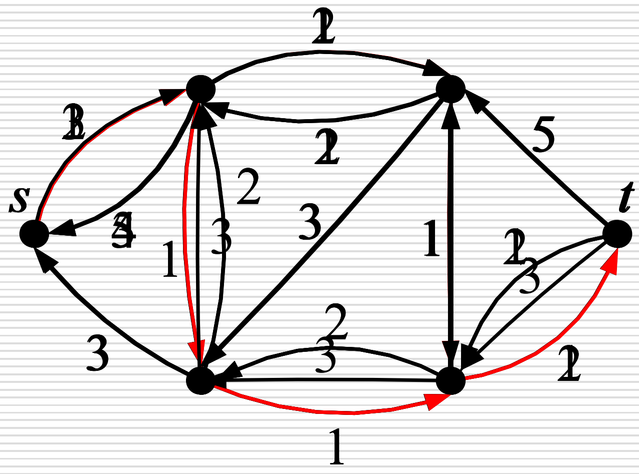


# Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

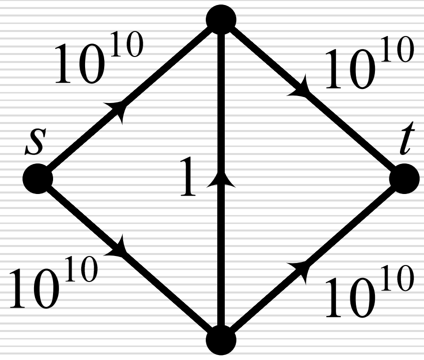
- Ενόσω επαυξητικό μονοπ. *p* στο υπολειμματικό,
  - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p}\{r_e\}$
  - Αύξηση ροής κατά $\delta$ στο *p* και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.
- Επαυξητικό μονοπάτι με π.χ. DFS, BFS.
  - Επαύξηση σε χρόνο $O(m)$.





# Χρόνος Εκτέλεσης

- Ακέραιες χωρητικότητες $\leq$ U:
  - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
  - Χρόνος εκτέλεσης O($m^2$ $U$) .
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες έχει ακέραιη μέγιστη ροή.
- Μπορεί εκθετικός χρόνος για μεγάλες χωρητικότητες !
- Μπορεί να μην τερματίσει για άρρητες χωρητικότητες.



# Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
  - $2m$ επαυξήσεις $\Rightarrow$ μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
  - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
    - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες $\geq \Delta$.
    - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, $\Delta \leftarrow \Delta / 2$.
  - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$ .
- Επαυξητικό μονοπάτι ελάχιστου μήκους (ακμών).
  - Υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(m)$.
  - #επαυξήσεων $O(n\,m)$, χρόνος εκτέλεσης $O(n\,m^2)$.
  - Βελτίωση Dinic: υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(n)$!
    - Χρόνος εκτέλεσης $O(n^2\,m)$.
- Καλύτεροι αλγόριθμοι με blocking-flow και push-relabel τεχνικές έχουν χρόνους $O(nm\log n)$ και $O(n^3)$ αντιστ.

# Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός μέγιστου αριθμού ακμών χωρίς κοινά άκρα (ταίριασμα).
- Μέγιστη ροή: πηγή *s*, προορισμός *t*, προσανατολισμός $s \rightarrow t$, χωρητικότητα 1.