Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 24/11/2016

Άσκηση 1: Επιλογή και Κάλυψη Μαθημάτων

(α) Στο πρόβλημα της επιλογής μαθημάτων έχουμε n αιτήματα για διδασκαλία μαθημάτων, κάθε αίτημα i χαρακτηρίζεται από το χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ στο οποίο θα πρέπει διδαχθεί το μάθημα, και στόχος είναι να επιλέξουμε ένα μέγιστο, ως προς τον πληθικό του αριθμό, σύνολο μαθημάτων που δεν έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους.

(α.1) Γνωρίζουμε ήδη ότι μπορούμε να υπολογίσουμε μια βέλτιστη λύση εφαρμόζοντας το άπληστο κριτήριο του *ελάχιστου χρόνου ολοκλήρωσης*, σύμφωνα με το οποίο επιλέγουμε το διαθέσιμο μάθημα με τον ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης, αφαιρούμε όσα μαθήματα επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.

Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω εναλλακτικά κριτήρια εγγυώνται μια βέλτιστη λύση και ποια όχι. Για κάθε κριτήριο, πρέπει είτε να αποδείξετε ότι οδηγεί πάντα σε μία βέλτιστη λύση είτε να βρείτε ένα στιγμιότυπο όπου η λύση στην οποία οδηγούμαστε δεν είναι βέλτιστη. Για διευκόλυνση, μπορείτε να "σπάσετε" τις ισοπαλίες (ως προς το κριτήριο που εφαρμόζετε) με όποιον τρόπο επιθυμείτε.

1. *Λιγότερες επικαλύψεις*: Επιλέγουμε το μάθημα με τις λιγότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα, αφαιρούμε όλα τα μαθήματα που επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.
2. *Μεγαλύτερη διάρκεια*: Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα με τη μεγαλύτερη διάρκεια και επαναλαμβάνουμε.
3. *Περισσότερες επικαλύψεις*: Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα που έχει τις περισσότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα και επαναλαμβάνουμε.

(α.2) Θεωρούμε τώρα ότι κάθε μάθημα $i \in \{1, \dots, n\}$ διδάσκεται στο χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ και δίνει στο φοιτητή έναν αριθμό διδακτικών μονάδων w_i με την επιτυχή παρακολούθησή του. Βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα σύνολο μαθημάτων που δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους και μεγιστοποιεί τον συνολικό αριθμό διδακτικών μονάδων.

(β) Το ΔΣ του Φοιτητικού Συλλόγου της Σχολής μόλις αποφάσισε να πραγματοποιηθεί Γενική Συνέλευση φοιτητών αύριο κιόλας, και εσείς αναλάβατε να περάσετε από όλα τα μαθήματα που γίνονται σήμερα στη Σχολή για να ενημερώσετε τους συμφοιτητές σας. Δυστυχώς, πρέπει να βρίσκεστε στα Παλιά Κτίρια όλη τη μέρα. Μπορείτε να φεύγετε μόνο στιγμιαία προκειμένου να μεταφερθείτε στα Νέα Κτίρια, να περάσετε από όλα τα αμφιθέατρα στα οποία γίνεται μάθημα εκείνη τη στιγμή και να κάνετε την ανακοίνωσή σας. Γνωρίζετε το πρόγραμμα των μαθημάτων για σήμερα, δηλαδή γνωρίζετε ότι κάθε μάθημα $i \in \{1, \dots, n\}$ διδάσκεται στο χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$. Στόχος σας είναι να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές θα πάτε στα Νέα Κτίρια ώστε να μετακινηθείτε όσες λιγότερες φορές είναι δυνατόν (θεωρήστε ότι η μεταφορά και οι ανακοινώσεις γίνονται στιγμιαία). Διατυπώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να λύνει αυτό το πρόβλημα. Αποδείξτε την ορθότητά του και βρείτε τη χρονική του πολυπλοκότητα.

Άσκηση 2: Πομποί και Δέκτες

(α) Έχουμε n κεραίες που διακρίνονται σε πομπούς και δέκτες και είναι τοποθετημένες σε μια νοητή ευθεία, στην διεύθυνση δύσης - ανατολής. Οι πομποί εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες λαμβάνουν μόνο από τα δυτικά. Κάθε πομπός μπορεί να στέλνει μηνύματα σε έναν και μοναδικό δέκτη (και αντίστοιχα κάθε δέκτης μπορεί να λαμβάνει μηνύματα από έναν και μοναδικό πομπό, δεν έχουμε καθόλου προβλήματα παρεμβολών ή εξασθένησης σήματος λόγω της απόστασης). Το ζητούμενο είναι να μεγιστοποιήσουμε τους πομπούς και τους δέκτες που χρησιμοποιούνται. Κωδικοποιούμε, λοιπόν, το παραπάνω πρόβλημα ως μία ακολουθία $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ όπου $\alpha_i = t$ (αντίστοιχα, $\alpha_i = r$) αν η κεραία στη θέση i είναι πομπός (αντίστοιχα, δέκτης). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που, με είσοδο μια τέτοια ακολουθία, υπολογίζει τον μέγιστο αριθμό πομπών και δεκτών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.

(β) Έπειτα από αναβάθμιση του συστήματος, οι κεραίες μας μπορούν πλέον να λειτουργούν είτε ως πομποί είτε ως δέκτες. Όταν μία κεραία i λειτουργεί ως πομπός, έχει κατανάλωση ισχύος T_i, ενώ όταν λειτουργεί ως δέκτης έχει κατανάλωση ισχύος $R_i \leq T_i$. Για διευκόλυνση, θεωρούμε ότι έχουμε άρτιο πλήθος κεραιών n. Δυστυχώς η αναβάθμιση δεν κατάφερε να αντιμετωπίσει τον περιορισμό στην κατεύθυνση εκπομπής (οι πομποί συνεχίζουν να εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες να λαμβάνουν μόνο από τα δυτικά) και τον περιορισμό του μοναδικού πομπού για μοναδικό δέκτη. Το ζητούμενο είναι να χωρίσουμε τις κεραίες σε $n/2$ ζεύγη πομπού-δέκτη ώστε να ελαχιστοποιήσετε τη συνολική κατανάλωση ισχύος (οι κεραίες αριθμούνται πάντα από τα δυτικά προς τα ανατολικά, και για κάθε ζεύγος πομπού i $-$ δέκτη j, πρέπει να ισχύει ότι $i < j$). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (υπάρχει bonus για ιδιαίτερα αποδοτικούς αλγόριθμους). *Παράδειγμα* : Έστω ότι έχουμε 4 κεραίες με κατανάλωση ενέργειας (ως πομποί και δέκτες αντίστοιχα, από τα δυτικά προς τα ανατολικά): $(9, 6)$, $(6, 2)$, $(8, 1)$ και $(5, 3)$. Βέλτιστη λύση είναι να "ζευγαρώσουμε" τις κεραίες 1-3 και 2-4 ή τις κεραίες 1-4 και 2-3, με συνολική κατανάλωση ενέργειας 19.

Άσκηση 3: Διαγωνισμός Χορού

(α) Πρόκειται να λάβετε μέρος σε έναν διαγωνισμό χορού! Αύριο κιόλας είναι η μεγάλη μέρα! Γνωρίζετε τη λίστα με τα n κομμάτια του διαγωνισμού και τη σειρά με την οποία θα παιχτούν. Έχετε κάνει διεξοδική έρευνα και γνωρίζετε τους κριτές και τις ικανότητές σας, σε βαθμό που να μπορείτε να προβλέψετε με ακρίβεια τη βαθμολογία $\mathrm{score}(i)$ που θα λάβετε αν χορέψετε το i-οστό κομμάτι της λίστας. Δυστυχώς, μετά από κάθε κομμάτι i, χρειάζεστε χρόνο να ξεκουραστείτε. Έτσι, αν χορέψετε το κομμάτι i, δεν μπορείτε να χορέψετε τα επόμενα $\mathrm{rest}(i)$ κομμάτια, δηλ. τα κομμάτια $i+1, \ldots, i+\mathrm{rest}(i)$. Δεν υπάρχει άλλος περιορισμός στο πλήθος των κομματιών που μπορείτε να χορέψετε. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει τη μέγιστη συνολική βαθμολογία που μπορείτε να επιτύχετε. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Λίγες ώρες πριν αρχίσει ο διαγωνισμός, συνειδητοποιείτε ότι για κάθε κομμάτι θα πρέπει να φοράτε διαφορετικά ρούχα! Έτσι, πριν από κάθε κομμάτι, θα χρειαστείτε χρόνο προετοιμασίας. Προκειμένου λοιπόν να χορέψετε το i-οστό κομμάτι, θα πρέπει να μην έχετε χορέψει τα προηγούμενα $\mathrm{prep}(i)$ κομμάτια, δηλ. τα κομμάτια $i - \mathrm{prep}(i), \ldots, i-1$, ώστε να προετοιμαστείτε κατάλληλα. Ευτυχώς, καθώς προετοιμάζεστε, ξεκουράζεστε και από το προηγούμενό σας κομμάτι, δηλαδή οι χρόνοι ξεκούρασης και προετοιμασίας μπορεί να επικαλύπτονται. Με τα νέα δεδομένα, πρέπει να βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει τη μέγιστη συνολική βαθμολογία που μπορείτε να επιτύχετε. Για την ανάλυση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι ο μέγιστος χρόνος προετοιμασίας και ο μέγιστος χρόνος ξεκούρασης δεν ξεπερνούν το M.

Άσκηση 4: Βγάζοντας Βόλτα το Σκύλο

Ενδιαφέρεστε να αγοράσετε καινούριο λουρί για να βγάζετε βόλτα το σκύλο σας και θέλετε να υπολογίσετε το μήκος του λουριού που θα αγοράσετε (το σχέδιο το έχετε ήδη αποφασίσει). Έχοντας βγάλει πολλές φορές το σκύλο σας βόλτα, ξέρετε ότι εσείς βαδίζετε σε μία πολυγωνική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $p_1, \dots, p_n$, και ο σκύλος σας βαδίζει σε μία αντίστοιχη πολυγωνική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $q_1, \dots, q_m$, καθώς τον κρατάτε από το λουρί. Υποθέτουμε πως τα βήματά σας αντιστοιχούν ακριβώς στα n (m, αντίστοιχα, για το σκύλο) σημεία των καμπύλων και επομένως κάθε χρονική στιγμή βρίσκεστε σε κάποιο από τα σημεία $p_1, \dots, p_n$ ($q_1, \dots, q_m$, αντίστοιχα, για το σκύλο). Τόσο εσείς όσο και ο σκύλος σας μπορείτε να σταματήσετε σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης, για όσο χρόνο χρειαστεί, αλλά ποτέ δεν γυρίζετε σε προηγούμενο σημείο της καμπύλης σας. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το ελάχιστο μήκος λουριού που επαρκεί για την καθημερινή βόλτα του σκύλου. Μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένη μία συνάρτηση d που υπολογίζει σε σταθερό χρόνο την απόσταση $d(p, q)$ μεταξύ ενός σημείου p στη δική σας διαδρομή και ενός σημείου q στη διαδρομή του σκύλου. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Παράδειγμα:* Έστω ότι $n = 2$ και $m = 3$ και ότι οι αποστάσεις κάθε ζεύγους σημείων είναι: $d(p_1, q_1) = 1$, $d(p_1, q_2) = 2$, $d(p_1, q_3) = 3$, $d(p_2, q_1) = 2.5$, $d(p_2, q_2) = 2.2$, $d(p_2, q_3) = 1.8$. Το ελάχιστο μήκος λουριού που θα χρειαστείτε έχει μήκος 2. Μία βέλτιστη διάσχιση των καμπυλών P και Q είναι η εξής: Ξεκινάτε και οι δύο από τα σημεία p_1 και q_1 αντίστοιχα. Την επόμενη χρονική στιγμή, ο σκύλος προχωρά στο q_2 ενώ εσείς μένετε στο p_1. Τέλος, μετακινείστε και οι δύο στα τελικά σημεία σας, p_2 και q_3 αντίστοιχα.