Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 19/2/2017

Άσκηση 1: Προτάσεις Φίλων

Σε μια πλατφόρμα κοινωνικής δικτύωσης, θέλουμε να υλοποιήσουμε ένα σύστημα πρότασης φίλων. Για κάθε ζευγάρι συνδεδεμένων χρηστών i και j, οι αναλυτές της συμπεριφοράς των χρηστών έχουν εκτιμήσει την "εμπιστοσύνη" $t(i,j) \in (0,1)$ που δείχνει ο i για τον j με βάση τη συχνότητα αλληλεπίδρασής τους. Η εκτίμηση της "εμπιστοσύνης" δεν είναι κατ΄ ανάγκη συμμετρική (δηλ. μπορεί να ισχύει ότι $t(i,j) \neq t(j,i)$), ενώ αν δύο χρήστες i και j δεν είναι συνδεδεμένοι, τότε $t(i,j) = t(j,i) = 0$. Οι αναλυτές της συμπεριφοράς των χρηστών έχουν υπολογίσει ζεύγη παραμέτρων $(2,\beta_2),\ldots,(k,\beta_k)$, και θεωρούν ότι ο j αποτελεί καλή πρόταση για τον i, αν υπάρχει "κατευθυνόμενο μονοπάτι" $p = (u_0 = i, u_1, \ldots, u_\ell = j)$ μήκους ℓ, $2 \leq \ell \leq k$, που συνδέει τον i με τον j και εξασφαλίζει συνολική "εμπιστοσύνη" τουλάχιστον β_ℓ, δηλ. $t(p) = \prod_{q=0}^{\ell-1} t(q,q+1) \geq \beta_\ell$.

Χρειάζεται να υλοποιήσουμε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις καλές προτάσεις φίλων για δεδομένο χρήστη i. Πρέπει να αιτιολογήσουμε την ορθότητα του αλγορίθμου και πρέπει να εκτιμήσουμε την υπολογιστική του πολυπλοκότητα. Για την εκτίμηση της πολυπλοκότητας, θεωρούμε ότι το πλήθος των χρηστών είναι n, το πλήθος των συνδέσεων μεταξύ των χρηστών είναι m, και ότι το k είναι πολύ μικρό σε σχέση με το n (π.χ., το k μπορεί να είναι σταθερό ή $O(\log n)$).

Άσκηση 2: Αποφεύγοντας τη Συμφόρηση

Στις μεγαλουπόλεις, πολλοί άνθρωποι μετακινούνται κάθε πρωί από τα προάστια προς το κέντρο (και αντίστροφα το απόγευμα). Επειδή σχεδόν όλοι χρησιμοποιούν συντομότερες διαδρομές (με βάση την απόσταση σε km) για τις μετακινήσεις τους, κάθε πρωί κατά τις ώρες αιχμής, όλοι οι δρόμοι που ανήκουν στις συντομότερες διαδρομές από τα μεγάλα προάστια προς το κέντρο είναι μποτιλιαρισμένοι. Επιδιώκοντας να ελαχιστοποιήσουμε τον χρόνο μετακίνησης, θέλουμε να υπολογίσουμε τη συντομότερη διαδρομή που αποφεύγει όλους αυτούς τους μποτιλιάρισμένους δρόμους.

Θεωρούμε λοιπόν ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E,w)$, με n κορυφές, m ακμές και (μη αρνητικά) μήκη w στις ακμές, μια αφετηρία $s \in V$ (το προάστιο όπου κατοικούμε) και έναν τελικό προορισμό $t \in V$ (ο χώρος εργασίας μας στο κέντρο της πόλης). Θεωρούμε ότι μια ακμή e είναι *ανεπιθύμητη* αν ανήκει σε κάποιο συντομότερο $s-t$ μονοπάτι. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο το γράφημα $G(V,E,w)$ και τις κορυφές s και t, υπολογίζει μια συντομότερη $s-t$ διαδρομή στο υπογράφημα του G που δεν περιλαμβάνει καμία ανεπιθύμητη ακμή (ή διαπιστώνει ότι δεν υπάρχει τέτοια διαδρομή). Να εξηγήσετε λεπτομερώς πως θα υλοποιηθεί κάθε βήμα του αλγόριθμου και να υπολογίσετε τον χρόνο εκτέλεσης που προκύπτει.

Άσκηση 3: Τροποποίηση του Αλγόριθμου Dijkstra (DPV 4.17)

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E,w)$ με n κορυφές, m ακμές και (μη αρνητικά) ακέραια μήκη w στις ακμές.

(α) Έστω ότι υπάρχει ένας (σχετικά μικρός) φυσικός C τέτοιος ώστε $w(e) \in \{0,1,\ldots,C\}$ για κάθε ακμή e. Να περιγράψετε μια υλοποίηση του αλγορίθμου Dijkstra με χρόνο εκτέλεσης $O(nC+m)$.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $w(e) \in \{0, 1, \dots, 2^C\}$ για κάθε ακμή e. Να περιγράψετε μια υλοποίηση του αλγορίθμου Dijkstra με χρόνο εκτέλεσης $O((n+m)C)$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα της υλοποίησης που προτείνετε.

Άσκηση 4: Συντομότερα Μονοπάτια με Δύο Κριτήρια

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$ με n κορυφές, m ακμές, θετικά μήκη w και μη αρνητικά κόστη c στις ακμές. Έστω ακόμη μια αρχική κορυφή s του G.

(α) Αρχικά υποθέτουμε ότι για κάθε ακμή e, $c(e) \in \{0, 1\}$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που για κάθε κορυφή $u \in V$, υπολογίζει το μήκος του συντομότερου $s-u$ μονοπατιού που περιλαμβάνει ακμές συνολικού κόστους το πολύ k, για δεδομένο φυσικό $k \geq 1$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Θεωρούμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου $c(e) \in \mathbb{N}$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που για κάθε κορυφή $u \in V$, υπολογίζει το μήκος του συντομότερου $s-u$ μονοπατιού που περιλαμβάνει ακμές συνολικού κόστους το πολύ C, για δεδομένο φυσικό $C \geq 1$. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας; Είναι ο αλγόριθμός σας πολυωνυμικού χρόνου (να αιτιολογήσετε);

Άσκηση 5: Διαφημίσεις στο Διαδίκτυο

Είμαστε υπεύθυνοι για τη λειτουργία ενός ειδησεογραφικού web site που δέχεται καθημερινές επισκέψεις από τους ίδιους n ανθρώπους. Οι επισκέπτες του site κατηγοριοποιούνται με βάση συγκεκριμένες ιδιότητες (π.χ., άνδρας ή γυναίκα, παντρεμένος ή όχι, εργαζόμενος ή άνεργος, δημόσιος ή ιδιωτικός τομέας εργασίας, ηλικιακή κατηγορία, κάτοικος Ελλάδας ή εξωτερικού). Κάθε επισκέπτης μπορεί να ανήκει σε μία ή περισσότερες από τις k δημογραφικές κατηγορίες που ορίζονται με βάση αυτές τις ιδιότητες. Τα έσοδά μας προέρχονται αποκλειστικά από τις διαφημίσεις m εταιρειών που προβάλλονται στο site μας. Με βάση τα χρήματα που διαθέτει κάθε εταιρεία i, μπορεί να εμφανίζονται το πολύ c_i διαφημίσεις της κάθε ημέρα. Επιπλέον, κάθε εταιρεία i επιθυμεί οι διαφημίσεις της να προβάλλονται μόνο σε επισκέπτες που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο $S_i \subseteq \{1, \dots, k\}$ από τις k δημογραφικές κατηγορίες στις οποίες ανήκουν οι επισκέπτες μας.

Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που με βάση τα παραπάνω δεδομένα, αποφασίζει αν είναι δυνατόν να εμφανίζεται μια διαφήμιση σε κάθε επισκέπτη ώστε να προβάλλονται το πολύ c_i διαφημίσεις κάθε εταιρείας i και οι διαφημίσεις της εταιρείας i να απευθύνονται μόνο σε επισκέπτες που ανήκουν στις δημογραφικές κατηγορίες του S_i. Αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό, ο αλγόριθμος θα πρέπει να υπολογίζει ποιοι επισκέπτες θα βλέπουν τις διαφημίσεις κάθε εταιρείας. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 6: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

3-Διαμέριση
Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \dots, w_n\}$ με n θετικούς ακέραιους. Θεωρούμε ότι το συνολικό άθροισμα $w(A) = \sum_{i \in A} w_i$ των στοιχείων του A είναι πολλαπλάσιο του 3.
Ερώτηση: Υπάρχει διαμέριση του A σε σύνολα A_1, A_2, A_3 ώστε $w(A_1) = w(A_2) = w(A_3)$;

Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση
Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \dots, w_n\}$ με n φυσικούς και φυσικοί B και x με $B > x \geq 1$.
Ερώτηση: Υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - x \leq w(S) \leq B$;

Κύκλος Hamilton κατά Προσέγγιση

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.

Ερώτηση: Υπάρχει κυκλική διαδρομή στο G που διέρχεται από κάθε κορυφή τουλάχιστον μία και το πολύ δύο φορές;

Ικανοποιησιμότητα με Περιορισμούς

Είσοδος: Λογική πρόταση $\varphi = \bigwedge_{j=1}^{m}(\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4})$ σε 4-Συζευκτική Κανονική Μορφή (4-CNF). Υπενθυμίζεται ότι στην αναπαράσταση της φ σε 4-CNF, κάθε literal ℓ_{ji} είναι είτε μια λογική μεταβλητή είτε η άρνηση μιας λογικής μεταβλητής.

Ερώτηση: Υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας στις λογικές μεταβλητές ώστε κάθε όρος $\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4}$ να περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα αληθές και τουλάχιστον ένα ψευδές literal;

Επιλογή Ανεξάρτητων Υποσυνόλων

Είσοδος: Συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ υποσυνόλων ενός συνόλου U με n στοιχεία και φυσικός αριθμός k, $2 \leq k \leq m$.

Ερώτηση: Υπάρχουν k υποσύνολα στη συλλογή $\mathcal{S}$ που να είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους;

Συντομότερο Μονοπάτι με Περιορισμούς (Constraint Shortest Path)

Είσοδος: Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$, όπου κάθε ακμή e έχει ακέραιο μήκος $w(e) \geq 0$ και ακέραιο κόστος $c(e) \geq 0$, δύο κορυφές s, t και δύο ακέραιοι $W, C \geq 0$.

Ερώτηση: Υπάρχει $s - t$ μονοπάτι στο G με συνολικό μήκος μικρότερο ή ίσο του W και συνολικό κόστος μικρότερο ή ίσο του C.