

Διαίρει-και-Βασίλευε

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Διαίρει-και-Βασίλευε

- Γενική μέθοδος σχεδιασμού αλγορίθμων:
 - **Διαίρεση** σε (≥ 2) υποπροβλήματα (σημαντικά) μικρότερου μεγέθους.
 - **Ανεξάρτητη επίλυση** υπο-προβλημάτων (αναδρομικά) (για μικρά υποπροβλήματα εφαρμόζονται στοιχειώδεις αλγόριθμοι).
 - **Σύνθεση** λύσης αρχικού προβλήματος από λύσεις υποπροβλημάτων.
- **Ισχυρή** μέθοδος, με πολλές **σημαντικές εφαρμογές!**
 - Ταξινόμηση: MergeSort, QuickSort.
 - Πολλαπλασιασμός αριθμών, πινάκων, FFT.
 - «**Εξειδίκευση**»: Δυαδική αναζήτηση, QuickSelect, ύψωση σε δύναμη.
- (Εύκολη) ανάλυση με **αναδρομικές σχέσεις**.
 - Μη γραμμικές, συγκεκριμένης μορφής.

Πρόβλημα Ταξινόμησης

- Πρόβλημα Ταξινόμησης:
 - **Είσοδος** : ακολουθία n αριθμών (a_1, a_2, \dots, a_n) .
 - **Έξοδος** : αναδιάταξη $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ με αριθμούς σε **αύξουσα** σειρά $(\forall i \ a'_i \leq a'_{i+1})$.
- **Στατική** συλλογή δεδομένων (όχι εισαγωγή και διαγραφή).
- **Θεμελιώδες** αλγοριθμικό πρόβλημα.
 - Πολλές **εφαρμογές** (περ. 20%-25% υπολογιστικού χρόνου).
 - Ταχύτεστη **αναζήτηση** σε ταξινομημένα δεδομένα.
 - Σημαντικές αλγοριθμικές **ιδέες και τεχνικές**.

Συγκριτικές Μέθοδοι Ταξινόμησης

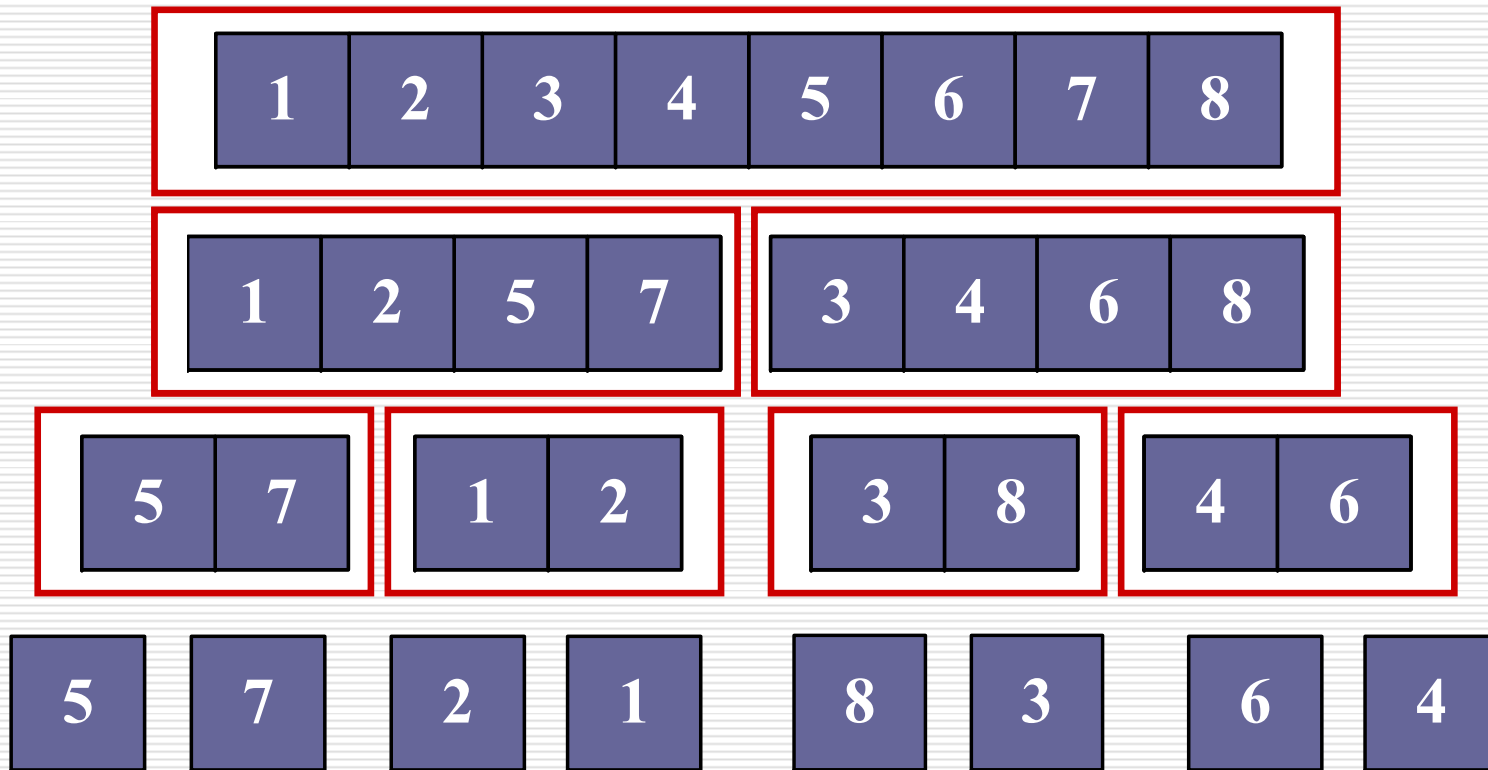
- **Αντιμετάθεση** κάθε ζεύγους **στοιχείων εκτός διάταξης** (bubble sort).
- **Εισαγωγή** στοιχείου σε **κατάλληλη θέση** ταξινομημένου πίνακα (insertion sort).
- **Επιλογή μεγαλύτερου** στοιχείου και τοποθέτηση **στο τέλος** (selection sort, heapsort).
- **Συγχώνευση** ταξινομημένων **πινάκων** :
Διαίρεση στη μέση, ταξινόμηση, **συγχώνευση** (mergesort).
- **Διαίρεση** σε μικρότερα και μεγαλύτερα **από**
στοιχείο-διαχωρισμού και ταξινόμηση (quicksort).

MergeSort

- MergeSort (ταξινόμηση με **συγχώνευση**):
 - **Διαίρεση** ακολουθίας εισόδου (n στοιχεία) σε δύο υπο-ακολουθίες ίδιου μήκους ($n / 2$ στοιχεία).
 - **Ταξινόμηση** υπο-ακολουθιών **αναδρομικά**.
 - **Συγχώνευση** (merge) δύο ταξινομημένων υπο-ακολουθιών σε **μία ταξινομημένη ακολουθία**.

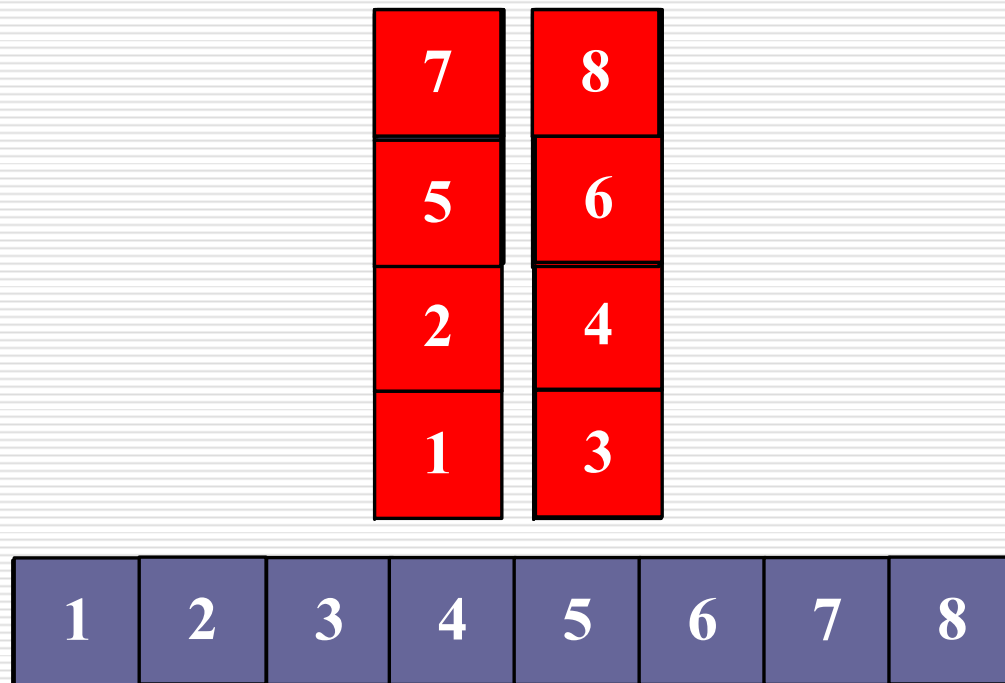
```
mergeSort(int A[], int left, int right) {  
    if (left >= right) return;  
    mid = (left + right) / 2;  
    mergeSort(A, left, mid);  
    mergeSort(A, mid+1, right);  
    merge(A, left, mid, right); }  
}
```

MergeSort



Συγχώνευση

- **Συγχώνευση** ταξινομημένων $A[\text{left} \dots \text{mid}]$ και $A[\text{mid}+1 \dots \text{right}]$ σε **ταξινομημένο** $A[\text{left} \dots \text{right}]$.



Συγχώνευση

- **Συγχώνευση** ταξινομημένων $A[\text{low} \dots \text{mid}]$ και $A[\text{mid}+1 \dots \text{up}]$ σε **ταξινομημένο** $A[\text{low} \dots \text{up}]$.
- $X[\text{up}-\text{low}+1] \leftarrow A[\text{low} \dots \text{up}];$ // προσωρινή αποθήκευση
 $i : 0 \leq i \leq \text{xmid}$ // δείκτης αριστερό τμήμα
 $j : \text{xmid}+1 \leq j \leq \text{xup}$ // δείκτης δεξιό τμήμα
 $k : \text{low} \leq k \leq \text{up}$ // δείκτης στο συγχωνευμένο πίνακα
- $X[i]$: **μικρότερο** διαθέσιμο στοιχείο στο **αριστερό** τμήμα.
 $X[j]$: **μικρότερο** διαθέσιμο στοιχείο στο **δεξιό** τμήμα.
- ```
while ((i <= xmid) && (j <= xup))
 if (X[i] <= X[j]) A[k++] = X[i++];
 else A[k++] = X[j++];
```
- Όταν ένα τμήμα **εξαντληθεί**, αντιγράφουμε όλα τα στοιχεία του άλλου στο  $A[ ]$ .

# Συγχώνευση

---

```
merge(int A[], int low, int mid, int up) {
 int xmid = mid-low, xup = up-low;
 int i = 0, // δείκτης στο αριστερό τμήμα
 j = xmid+1, // δείκτης στο δεξιό τμήμα
 k = low; // δείκτης στο αποτέλεσμα
 X[up-low+1] ← A[low...up];
 // συγχώνευση μέχρι ένα τμήμα να εξαντληθεί
 while ((i <= xmid) && (j <= xup))
 if (X[i] <= X[j]) A[k++] = X[i++];
 else A[k++] = X[j++];
 // αντέγραψε υπόλοιπα στοιχεία άλλου τμήματος
 if (i > xmid)
 for (int q = j; q <= xup; q++)
 A[k++] = X[q];
 else
 for (int q = i; q <= xmid; q++)
 A[k++] = X[q];
}
```

# MergeSort: Ορθότητα

---

- Ορθότητα **merge** επειδή τα τμήματα είναι ταξινομημένα.
  - Όταν ένα στοιχείο μεταφέρεται στον  $A[ ]$ , δεν υπάρχει μικρότερο διαθέσιμο στοιχείο στα δύο τμήματα.
- Ορθότητα **mergeSort** αποδεικνύεται επαγωγικά :
  - Βάση (ένα στοιχείο) τετριμμένη.
  - Δύο τμήματα σωστά ταξινομημένα (επαγωγική υποθ.) και συγχωνεύονται σωστά (ορθότητα merge)  $\Rightarrow$  Σωστά ταξινομημένος πίνακας  $A[ ]$ .

```
mergeSort(int A[], int left, int right) {
 if (left >= right) return;
 mid = (left + right) / 2;
 mergeSort(A, left, mid);
 mergeSort(A, mid+1, right);
 merge(A, left, mid, right); }
}
```

# Χρόνος Εκτέλεσης

---

- Χρόνος εκτέλεσης **merge** (για  $n$  στοιχεία) :  $\Theta(n)$  (γραμμικός)
  - $\Theta(1)$  λειτουργίες για **κάθε στοιχείο**.
- Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμων «**διαίρει-και-βασίλευε**» με διατύπωση και λύση **αναδρομικής εξίσωσης** λειτουργίας.
- **$T(n)$**  : χρόνος (χ.π.) για **ταξινόμηση  $n$  στοιχείων**.
  - **$T(n / 2)$**  : ταξινόμηση **αριστερού** τμήματος ( $n / 2$  στοιχεία).
  - **$T(n / 2)$**  : ταξινόμηση **δεξιού** τμήματος ( $n / 2$  στοιχεία).
  - **$\Theta(n)$**  : **συγχώνευση** ταξινομημένων τμημάτων.

$$T(n) = 2 T(n / 2) + \Theta(n), T(1) = \Theta(1)$$

- Χρόνος εκτέλεσης **MergeSort**:  **$T(n) = ???$**

# Δέντρο Αναδρομής

$$T(n) = 2 T(n / 2) + \Theta(n),$$
$$T(1) = \Theta(1)$$

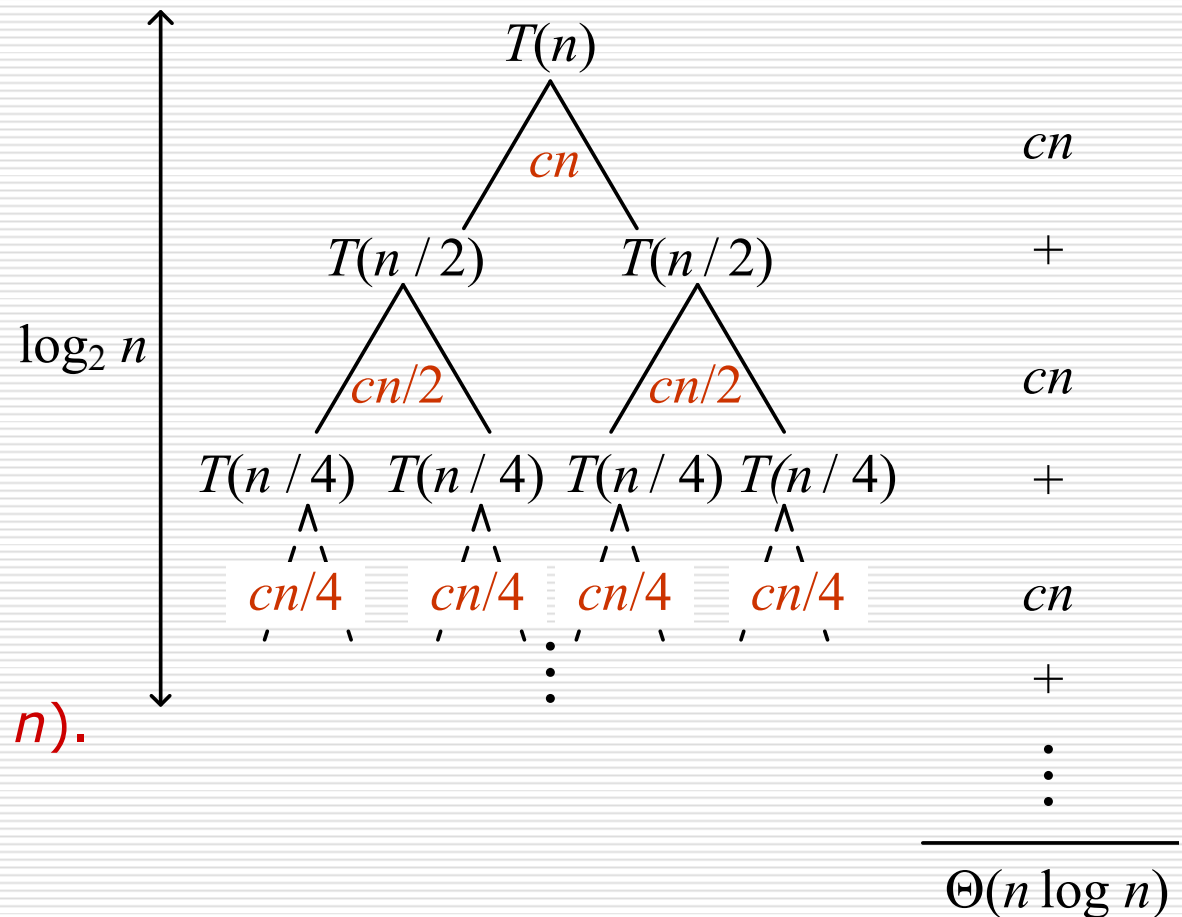
**Δέντρο αναδρομής :**

Ύψος :  $\Theta(\log n)$

#κορυφών :  $\Theta(n)$

Χρόνος / επίπεδο :  $\Theta(n)$

**Συνολικός χρόνος :  $\Theta(n \log n)$ .**



# Master Theorem

---

- Ανάλυση χρόνου εκτέλεσης αλγορίθμων «διαίρει-και-βασίλευε» με αναδρομικές σχέσεις της μορφής

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), T(1) = \Theta(1)$$

όπου  $a, b$  σταθερές και  $f(n)$  θετική συνάρτηση.

- Επίλυση με Θεώρημα Κυρίαρχου Όρου (Master Theorem)

1. Αν  $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. Αν  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. Αν  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$ , και  $af(n/b) < f(n)$ ,  
τότε  $T(n) = \Theta(f(n))$

- Ασυμπτωτικά μεγαλύτερος από  $f(n)$  και  $n^{\log_b a}$  καθορίζει λύση.

# Master Theorem: Ειδικές Μορφές

---

- Όταν  $f(n) = \Theta(n)$ , δηλ.  $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n)$ ,  $T(1) = \Theta(1)$ 
  1. Αν  $a > b$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  2. Αν  $a = b$ , τότε  $T(n) = \Theta(n \log n)$
  3. Αν  $a < b$ , τότε  $T(n) = \Theta(n)$
- Αν  $T(n) = T(\gamma_1 n) + T(\gamma_2 n) + \Theta(n)$ ,  $T(1) = \Theta(1)$   
με  $\gamma_1 + \gamma_2 < 1 - \epsilon$ , τότε  $T(n) = \Theta(n)$
- Όταν  $f(n) = \Theta(n^d)$ , δηλ.  $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^d)$ ,  $T(1) = \Theta(1)$ 
  1. Αν  $d < \log_b a$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  2. Αν  $d = \log_b a$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^d \log n)$
  3. Αν  $d > \log_b a$ , τότε  $T(n) = \Theta(n^d)$

# Παραδείγματα

---

- $T(n) = 9 T(n/3) + n.$        $T(n) = \Theta(n^2)$  (περ. 1)
- $T(n) = T(2n/3) + 1.$        $T(n) = \Theta(\log n)$  (περ. 2)
- $T(n) = 3 T(n/4) + n \log n.$        $T(n) = \Theta(n \log n)$  (περ. 3)
- $T(n) = 2 T(n/2) + n.$        $T(n) = \Theta(n \log n)$  (περ. 2)
- $T(n) = 2 T(n/2) + n \log n.$ 
  - **Δεν εμπίπτει!** Με δέντρο αναδρομής βρίσκουμε ότι  $T(n) = \Theta(n \log^2 n).$



# Πολλαπλασιασμός Αριθμών

- Υπολογισμός **αθροίσματος**  $x + y$ ,  $x$  και  $y$  αριθμοί  $n$ -bits.
  - Κλασικός αλγόριθμος πρόσθεσης, **χρόνος**  $\Theta(n)$ .
- Υπολογισμός **γινομένου**  $x \times y$ ,  $x$  και  $y$  αριθμοί με  $n$ -bits.
  - Κλασικός αλγόριθμος πολ/μού, **χρόνος**  $\Theta(n^2)$ .
  - Καλύτερος αλγόριθμος;
- Διαίρει-και-Βασίλευε:
  - Διαίρεση:  $x = 2^{n/2}x_h + x_l$ ,  $y = 2^{n/2}y_h + y_l$   
$$x \times y = 2^n \overbrace{x_h y_h}^{z_h} + 2^{n/2} \overbrace{(x_h y_l + x_l y_h)}^{z_m} + \overbrace{x_l y_l}^{z_l} = 2^n z_h + 2^{n/2} z_m + z_l$$
    - 4 πολλαπλασιασμοί  $(n/2)$ -bits, 2 ολισθήσεις, 3 προσθέσεις.
    - Χρόνος:  $T_1(n) = 4T_1(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T_1(n) = \Theta(n^2)$

# Πολλαπλασιασμός Αριθμών

$$x \times y = 2^n \overbrace{x_h y_h}^{z_h} + 2^{n/2} \overbrace{(x_h y_l + x_l y_h)}^{z_m} + \overbrace{x_l y_l}^{z_l} = 2^n z_h + 2^{n/2} z_m + z_l$$

- Όμως  $z_m$  υπολογίζεται με **1 μόνο πολ/μο**  $(n/2+1)$ -bits.

$$z_m = (x_h + x_l)(y_h + y_l) - x_h y_h - x_l y_l$$

- 3 πολλαπλασιασμοί  $(n/2)$ -bits, 2 ολισθήσεις, 6 προσθέσεις.

- Χρόνος:  $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

- Παράδειγμα:  $2576 \times 7935 = 20440560$

$$x_h = 25, x_l = 76, y_h = 79, y_l = 35$$

$$z_h = 25 \times 79 = 1975, z_l = 76 \times 35 = 2660$$

$$z_m = (25 + 76)(79 + 35) - 1975 - 2660 =$$

$$= 101 \times 114 - 1975 - 2660 = 11514 - 1975 - 2660 = 6879$$

$$x \times y = 1975 \cdot 10^4 + 6879 \cdot 10^2 + 2660 = 20440560$$

# Πολλαπλασιασμός Πινάκων

- Υπολογισμός **γινομένου**  $C = A \times B$ .

$A, B$  τετραγωνικοί πίνακες  $n \times n$ .

- Εφαρμογή ορισμού:  $C[i, j] = \sum_{k=1}^n A[i, k]B[k, j]$

- Χρόνος  $\Theta(n^3)$  ( $n^2$  στοιχεία, χρόνος  $\Theta(n)$  για καθένα).

- Διαίρει-και-Βασίλευε:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

- 8 πολ/μοι και 4 προσθέσεις πινάκων  $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

- Χρόνος:  $T_1(n) = 8T_1(n/2) + \Theta(n^2) \Rightarrow T_1(n) = \Theta(n^3)$

# Αλγόριθμος Strassen (1969)

---

$$D_1 = (A_{21} + A_{22} - A_{11})(B_{22} - B_{12} + B_{11})$$

$$D_2 = A_{11}B_{11}$$

$$D_3 = A_{12}B_{21}$$

$$D_4 = (A_{11} - A_{21})(B_{22} - B_{12})$$

$$D_5 = (A_{21} + A_{22})(B_{12} - B_{11})$$

$$D_6 = (A_{12} - A_{21} + A_{11} - A_{22})B_{22}$$

$$D_7 = A_{22}(B_{11} + B_{22} - B_{12} - B_{21})$$

$$C_{11} = D_2 + D_3$$

$$C_{12} = D_1 + D_2 + D_5 + D_6$$

$$C_{21} = D_1 + D_2 + D_4 - D_7$$

$$C_{22} = D_1 + D_2 + D_4 + D_5$$

□ 7 πολ/μοι και 24 προσθέσεις πινάκων  $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

■ Χρόνος:  $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})$

# Υπολογισμός Δύναμης (Diffie-Hellman)

- Συμφωνία **Αλίκης** και **Βασίλη** σε κρυπτογραφικό **κλειδί**.  
**Εύα** παρακολουθεί για να «κλέψει» το κλειδί.
- Α, Β συμφωνούν **δημόσια** σε **πρώτο**  $p$  και **ακέραιο**  $q < p$ .  
Ε γνωρίζει  $p, q$ .
  - **Εμπλεκόμενοι αριθμοί** είναι **πολυψήφιοι** (π.χ. 512 ψηφία).
- Α διαλέγει τυχαία  $a < p$  και υπολογίζει  $q_a = q^a \bmod p$   
Β διαλέγει τυχαία  $b < p$  και υπολογίζει  $q_b = q^b \bmod p$   
Α, Β **ανταλλάσσουν**  $q_a, q_b$  και τα μαθαίνει Ε.
- Α, Β υπολογίζουν  **$K$  (μόνοι τους)**. **Ε δεν ξέρει  $K$** .
$$K = q_b^a \bmod p = (q^b \bmod p)^a \bmod p = q^{ab} \bmod p$$
- Για  $K$ , **Ε χρειάζεται  $a, b$**  (δεν μεταδόθηκαν).  
**Επίλυση διακριτού λογαρίθμου** (πολύ δύσκολο).

# Υπολογισμός Δύναμης

- Εφαρμογή υποθέτει **αποδοτικό** αλγόριθμο υπολογισμού  $\text{exp}(x, n, p) = x^n \bmod p$ ,  $x, n, p$  πολυψήφιοι ακέραιοι.
    - Υπολογισμός δυνάμεων με τη σειρά (1, 2, 3, ...):  
αν μήκος 512 bits, χρειάζεται περίπου  $2^{512}$  πολ/μους!!!
  - Διαίρει-και-Βασίλευε (έστω  $n$  δύναμη του 2):
    - Υπολογίζουμε αναδρομικά  $\text{exp}(x, n/2, p) = x^{n/2} \bmod p$
    - ... και  $\text{exp}(x, n, p) = \text{exp}(x, n/2, p) \times \text{exp}(x, n/2, p)$
  - #πολλαπλασιασμών:  $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$   
 $\Rightarrow T(n) = O(\log n)$ 
    - $p$  με μήκος 512 bits:  
περίπου  $2^{10}$  πολ/μους.
- $\text{ExponRec}(x, n, p)$

```
if $n = 1$ then return($x \bmod p$);
 $t \leftarrow \text{ExponRec}(x, \lfloor n/2 \rfloor, p)$;
 $t \leftarrow t^2 \bmod p$;
if n is odd then return($t \times x \bmod p$);
else return(t);
```

# Προϋποθέσεις Εφαρμογής

---

- Διαίρεση **σημαντικά ευκολότερη** από επίλυση αρχικού.
- Σύνθεση **σημαντικά ευκολότερη** από επίλυση αρχικού.
- Υπο-στιγμιότυπα **σημαντικά μικρότερα** από αρχικό (π.χ. αρχικό μέγεθος  $n$ , υπο-στιγμ. μεγέθους  $n / c$ ,  $c > 1$ ).
- **Ανεξάρτητα υπο-στιγμιότυπα** που λύνονται από ανεξάρτητες αναδρομικές κλήσεις.
  - Ίδια ή **επικαλυπτόμενα** υπο-στιγμιότυπα : σημαντική και **αδικοιολόγητη** αύξηση χρόνου εκτέλεσης.
  - **Επικαλυπτόμενα** υπο-στιγμιότυπα :  
**Δυναμικός Προγραμματισμός**

# (Αντι)παράδειγμα

- Υπολογισμός  $n$ -οστού όρου ακολουθίας Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

```
long fibRec(long n) {
 if (n <= 1) return(n);
 return(fibRec(n-1) + fibRec(n-2)); }
```

- Χρόνος εκτέλεσης:

$$T(n) = \Theta(1) + T(n-1) + T(n-2), T(1) = \Theta(1)$$

- Λύση:  $T(n) = \Theta(\varphi^n)$ ,  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

- Επικαλυπτόμενα στιγμ.:  
Εκθετικός χρόνος!

```
long fib(long n) {
 long cur = 1, prev = 0;
 for (i = 2; i <= n; i++) {
 cur = cur + prev;
 prev = cur - prev; }
 return(cur); }
```

- Αλγόριθμος γραμμικού χρόνου;
- Καλύτερος αλγόριθμος;



# Ακολουθία Fibonacci

---

- Ακολουθία Fibonacci:  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$   
 $f_0 = 0, f_1 = 1$
- Θεωρούμε πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  και  $F_n = [f_n, f_{n-1}]$ 
  - Παρατηρούμε ότι  $A \times F_n = [f_n + f_{n-1}, f_n] = F_{n+1}$
  - Με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι  $F_n = A^{n-1} \times F_1, F_1 = [1, 0]$
- Διάρει-και-Βασίλευε:
  - Υπολογισμός  $A^n$  σε χρόνο  $O(\log n)$  (όπως με αριθμούς).
  - Υπολογίζω αναδρομικά το  $A^{n/2}$  και  $A^n = A^{n/2} \times A^{n/2}$
  - Χρόνος:  $T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) = \Theta(\log n)$