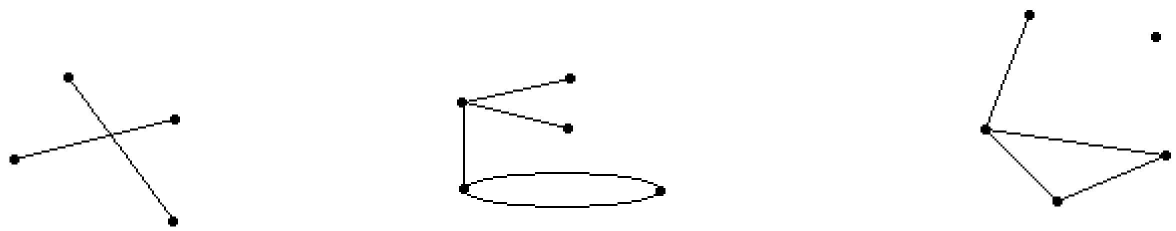
Γράφοι

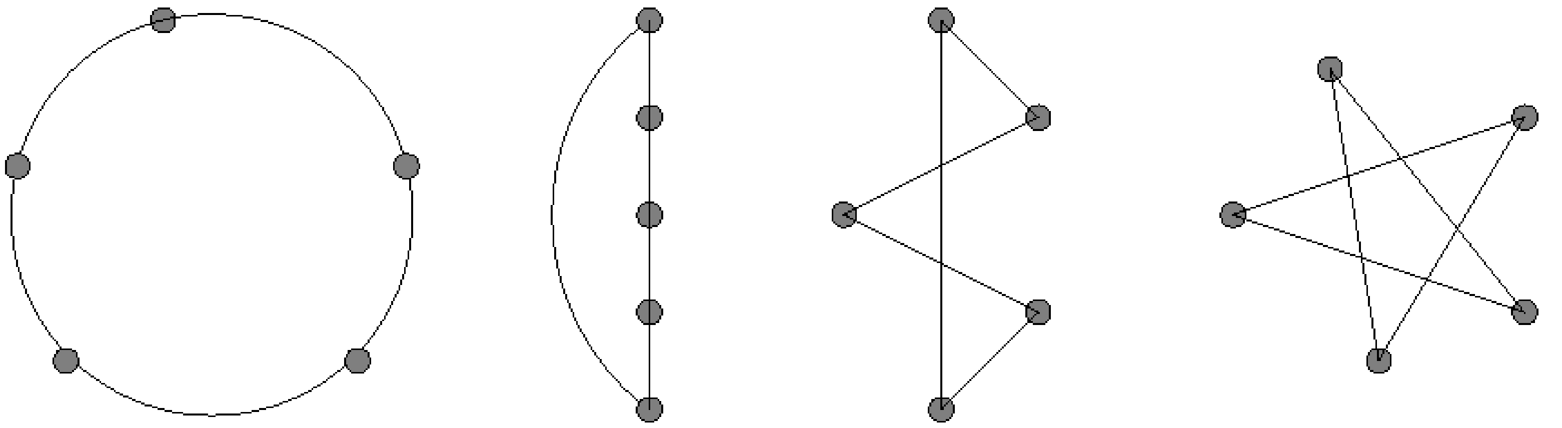
- Ένας γράφος ή αλλιώς γράφημα αποτελείται απο
  - *πλευρές* (*ακμές)* και
  - *κορυφές (κόμβους)*.



- Εφαρμογές: Τηλεπικοινωνιακά και Οδικά Δίκτυα, Ηλεκτρονικά Κυκλώματα, Β.Δ. κ.ά.

Graph Drawing

4 πιθανές αναπαραστάσεις του ίδιου γράφου



Σημασιολογία

- Ένας γράφος συμβολίζεται με *G=(V,E)*
  - Όπου *V={1,…,n}* ένα σύνολο από κορυφές (vertices)
  - $E \subseteq V \times V$ ένα σύνολο από πλευρές ή ακμές (edges)
  - $e = (u, v) \in E$ συμβολίζουμε μια πλευρά
  - $n=|V|$ το πλήθος των κορυφών
  - $m=|E|$ το πλήθος των πλευρών

Παρατηρήσεις: Οι πλευρές είναι ένα <u>διατεταγμένο</u> ζέυγος με στοιχεία κορυφές δηλαδή

εν γένει (1,2) δεν είναι το ίδιο με το (2,1)

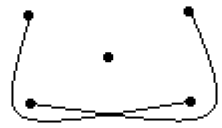
Θα γράφουμε (u,v) και θα εννοούμε οτι η κορυφή u ‘επικοινωνεί’ με την κορυφή v.

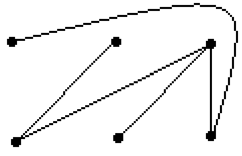
Μη κατευθυνόμενος γράφος

- Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος (undirected graph), είναι ένας γράφος για τον οποίο ισχύει

  (u,v) αν και μόνο αν (v,u)

  - Οι κορυφές *u* και *v* λέγονται *άκρα* της *(u,v)*
  - Οι κορυφές *u* και *v* λέγονται *γείτονες* αν υπάρχει η *(u,v)*.
  - Αν η *u* έχει *d* γείτονες τότε λέμε πως έχει *βαθμό d*.





Κατευθυνόμενος γράφος

- Σε ένα κατευθυνόμενο γράφο (directed graph) τα επόμενα **δεν** είναι (εν γένει) ισοδύναμα

$$(u,v) \qquad\qquad (v,u)$$

Πχ.

Υπάρχει η ακμή (1,2) ενώ
δεν υπάρχει η ακμή (2,1)

- Στη <u>κατευθυνόμενη</u> πλέον πλευρά *(u,v)* η κορυφή *u* λέγεται *πηγή (origin)* και η *v προορισμός (destination)*.
- Η κορυφή *v*
  - είναι γείτονας της *u* αν υπάρχει η κατευθυνόμενη πλευρά *(u,v)*.
  - έχει out-degree= d, αν έχει d γείτονες.
  - έχει in-degree= d, αν είναι ο γείτονας d κορυφών.

Γράφος με βάρη

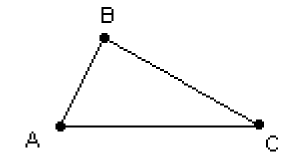
- Θεωρούμε μια συνάρτηση βάρους

$$w : E \to \Re$$

- Το w μπορεί να μοντελοποιεί βάρος, απόσταση, μήκος, χρόνο, κόστος, χωρητικότητα κ.ά. (επιτρέπονται και αρνητικά βάρη).

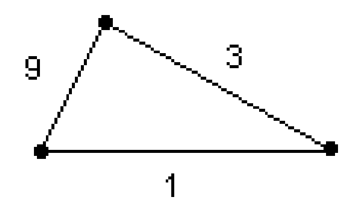
- Γενικά τα βάρη δεν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα

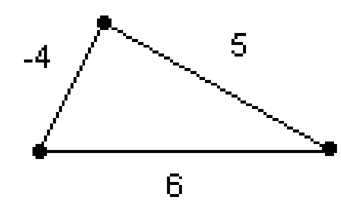
Ευκλείδειοι (μετρικοί) χώροι



$$AC \leq AB + BC$$

Γραφήματα





Απλός γράφος (simple)

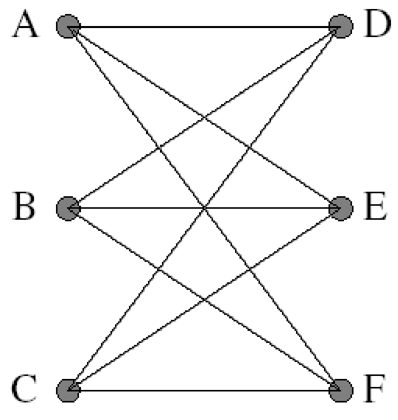
- Απλός γράφος λέγεται ο γράφος που δεν έχει
  - παράλληλες πλευρές
  - Self loops (πλευρές με του τύπου *(u,u)*)
- Σε <u>απλό μη κατευθυνόμενο</u> γράφο υπάρχουν το πολύ

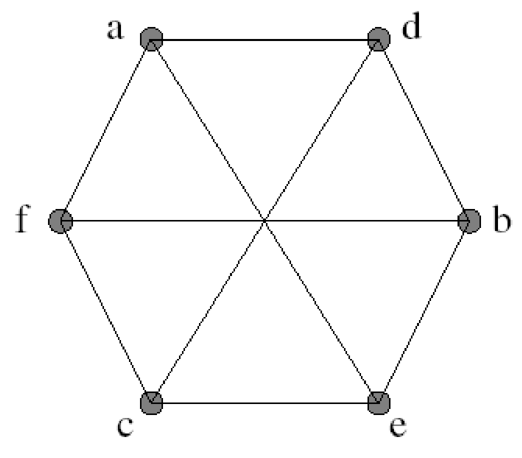
$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{πλευρές.}$$

- Σε <u>απλό κατευθυνόμενο</u> γράφο υπάρχουν το πολύ $m=n(n-1)$ πλευρές.
- Πυκνός γράφος: $m=\Theta(n^2)$
- Αραιός γράφος: $m=\Theta(n)$

Ισομορφισμός μεταξύ γράφων

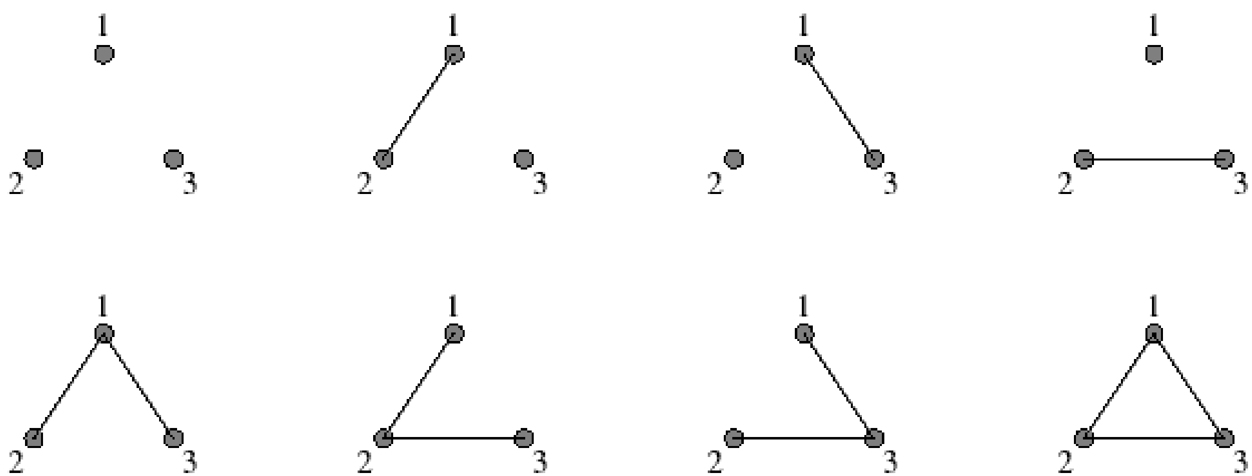
- Δύο γράφοι G_1 και G_2 λέγονται *ισομορφικοί* αν υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία των κορυφών τους έτσι ώστε ένα ζεύγος κορυφών του G_1 συνδέεται με μια ακμή αν και μόνο αν το αντίστοιχο ζεύγος κορυφών του G_2 συνδέεται με μια ακμή





Γράφος με ετικέτες (labelled)

- Σε γράφο με ετικέτες κάθε κορυφή έχει μια *μοναδική* ετικέτα (ID) που τη χαρακτηρίζει μονοσήμαντα. (Συνήθως 1..n)
- Για ένα γράφο με ετικέτες με n κορυφές υπάρχουν $2^{\binom{n}{2}}$ μη ισομορφικοί του.
  - Π.χ. Για n=3 υπάρχουν 8 τέτοιοι γράφοι

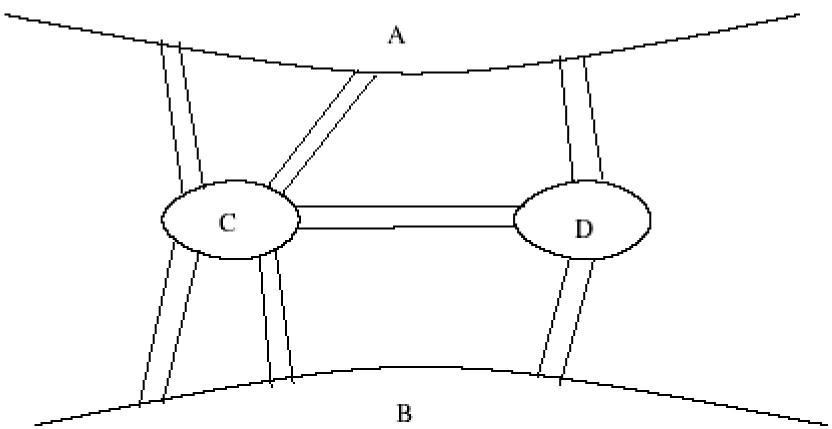


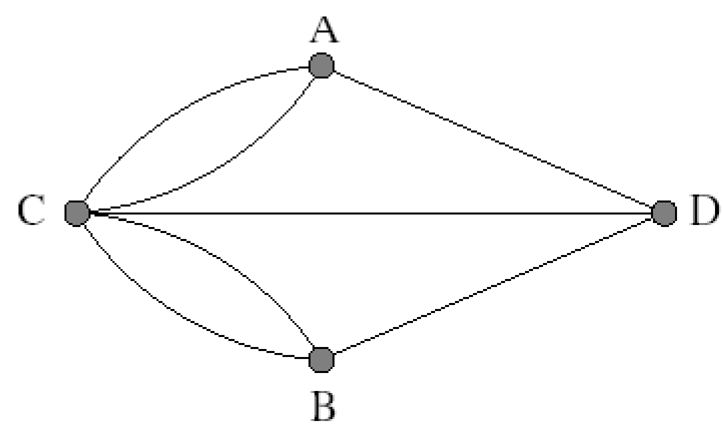
Μονοπάτια (paths) και κύκλοι (cycles)

- **Μονοπάτι** $P=(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ μήκους k είναι μια ακολουθία απο κορυφές έ.ώ. να υπάρχει πλευρά (v_i, v_{i+1}) για $0<=i<=k-1$ (με όλες τις πλευρές διαφορετικές)
- **Κύκλος** $C=(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0)$ μήκους k είναι ένα μονοπάτι που ξεκινά και τελειώνει με την ίδια κορυφή.
- **Απλό μονοπάτι**: όλες οι κορυφές είναι διαφορετικές
- **Απλός κύκλος**: όλες οι κορυφές είναι διαφορετικές εκτός από την αρχική και τελική που είναι ίσες

Οι γέφυρες του Königsberg

- **Πρόβλημα** : Είναι δυνατόν να διασχίσει κανείς και τις 7 γέφυρες περνώντας μια φορά από κάθε μια, ξεκινώντας και τελειώνοντας σε οποιοδήποτε σημείο;





Euler & Hamilton (paths & cycles)

- **Euler μονοπάτι** (Euler tour): μονοπάτι που περιέχει μια φορά ακριβώς όλες τις ακμές.
- **Euler κύκλος**: κύκλος που περιέχει μια φορά ακριβώς όλες τις ακμές.
- **Hamilton μονοπάτι** (Hamilton tour): απλό μονοπάτι που περιέχει μια φορά ακριβώς όλες τις κορυφές.
- **Hamilton κύκλος**: απλό κύκλος που περιέχει μια φορά ακριβώς όλες τις κορυφές.

Συνεκτικός γράφος

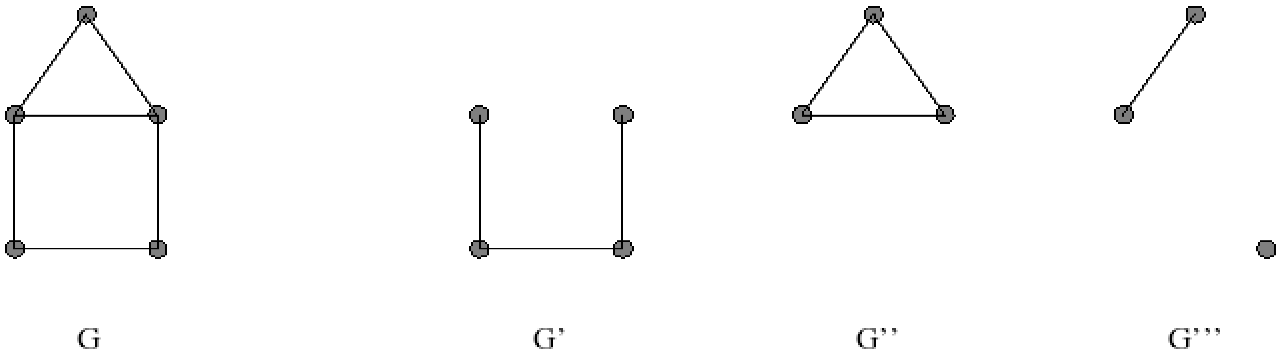
- Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος θα λέγεται **συνεκτικός** αν για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχει μονοπάτι που τις συνδέει.
- Ένας κατευθυνόμενος γράφος θα λέγεται **ισχυρά συνεκτικός** (strongly connected) αν για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχει ‘κατευθυνόμενο’ μονοπάτι που τις συνδέει.
- Ένας κατευθυνόμενος γράφος θα λέγεται **ασθενά συνεκτικός** (weakly connected) αν ο αντίστοιχος μη κατευθυνόμενος γράφος είναι συνεκτικός.
  - Σε απλό συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφο υπάρχουν τουλάχιστον $m=n-1$ πλευρές.
  - Σε απλό ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφο υπάρχουν τουλάχιστον $m=n$ πλευρές.

Υπογράφος

- Ο γράφος *G'=(V',E')* θα λέγεται **υπογράφος** ενός γράφου *G=(V,E)* αν:

$$V' \subseteq V$$

$$E' \subseteq E$$



G', G'', G''' are sub-graphs of G

Πλήθος Πλευρών

- **Θεώρημα**: Έστω G ένας απλός μη κατευθυνόμενος γράφος και k το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών τότε:

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

- **Πρόταση**: Ένας απλός μη κατευθυνόμενος γράφος με n κορυφές είναι συνεκτικός αν έχει m πλευρές με: $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

  δηλαδή να έχει περισσότερες από τις ακμές του πλήρους γράφου n-1 ακμών.

Θεώρημα 4 χρωμάτων

- Είναι δυνατόν να χρωματίσουμε ένα χάρτη με 4 χρώματα ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικό χρώμα;
- Ή είναι δυνατόν να χρωματίσουμε τις κορυφές του γράφου με το πολύ 4 χρώματα;
- Μπορεί να χρωματιστεί ένας επίπεδος γράφος με το πολύ 4 χρώματα;
- **Θεώρημα 4-χρωμάτων** (4-coloring theorem)

  Το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτείται για το χρωματισμό ενός επίπεδου γράφου είναι 4.

Διάφορα Προβλήματα

- Ταιριάσματος (matching)
- Περιπλανώμενου (πλανόδιου) πωλητή (TSP)
- Κάλυψης κορυφών (vertex cover)
- Ισομορφισμού (subgraph-isomorphism)
- Κλίκας (clique)