

# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

---

Επιμέλεια διαφανειών: **Δημήτρης Φωτάκης**  
(λίγες προσθήκες: Άρης Παγουρτζής)

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

---

- Υπολογιστική πολυπλοκότητα **αλγόριθμου A**:
  - Ποσότητα **υπολογιστικών πόρων** που απαιτεί A ως **αύξουσα συνάρτηση μεγέθους** στιγμιότυπου εισόδου.
  - Χρόνος, μνήμη, επεξεργαστές, επικοινωνία, τυχαιότητα.
  - **Χειρότερης, μέσης, καλύτερης** περίπτωσης.
- **Μέγεθος** στιγμιότυπου εισόδου  **$n$**  :
  - **#bits** για αναπαράσταση **δεδομένων εισόδου** στη μνήμη.
  - **Πλήθος βασικών συνιστωσών** που αποτελούν μέτρο μεγέθους και δυσκολίας στιγμιότυπου (π.χ. κορυφές & ακμές γράφου).
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα **προβλήματος Π**:
  - Πολυπλοκότητα (**χειρότερης/μέσης/καλύτερης** περίπτωσης) καλύτερου αλγόριθμου που λύνει πρόβλημα Π.

# Ανάλυση Αλγορίθμου

---

- Απόδειξη ορθότητας
  - Μερικές φορές για ένα καλώς ορισμένο υποσύνολο των στιγμιοτύπων εισόδου.
- Εκτίμηση υπολογιστικής πολυπλοκότητας.
  - **Χειρότερης, μέσης, και καλύτερης** περίπτωσης.
- Επιλογή ανάλογα με **απαιτήσεις εφαρμογής**, στο μάθημα θα μελετήσουμε κυρίως πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης.

# Ασυμπτωτική Εκτίμηση

---

- Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμου  $A$ :
  - Αύξουσα συνάρτηση του  $T(n)$  που εκφράζει σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται ο  $A$  όταν εφαρμόζεται σε στιγμ. μεγέθους  $n$ .
- Ενδιαφέρει η τάξη μεγέθους  $T(n)$  – ισοδύναμα ρυθμός αύξησης  $T(n)$  – και όχι ακριβής εκτίμηση  $T(n)$ .
  - Ακριβής εκτίμηση πολύ δύσκολη, εξαρτάται από υπολογιστικό περιβάλλον, υλοποίηση, ...
  - Τάξη μεγέθους είναι εγγενής ιδιότητα του αλγόριθμου.
    - Δυαδική αναζήτηση έχει **λογαριθμικό** χρόνο.
    - Γραμμική αναζήτηση έχει **γραμμικό** χρόνο.
- **Ασυμπτωτική εκτίμηση** αγνοεί σταθερές και εστιάζει σε τάξη μεγέθους, ισοδύναμα ρυθμό αύξησης.

# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

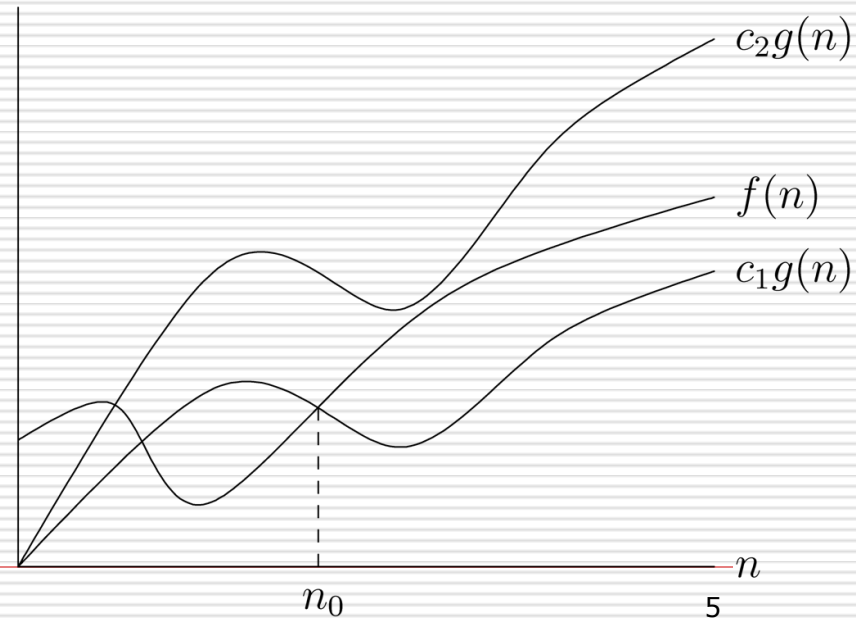
- ... εκφράζει τα **αποτελέσματα** ασυμπτωτικής εκτίμησης.
- $\Theta(\ )$  δηλώνει την **ακριβή εκτίμηση** τάξης μεγέθους.

$f(n) \in \Theta(g(n))$  ή  $f(n) = \Theta(g(n))$  αν  $\exists$  σταθερές  $c_1, c_2, n_0 > 0$ :  
 $\forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

- $\Theta(g(n))$  **σύνολο** συναρτήσεων **ίδιας** τάξης μεγέθους με  $g(n)$ .

$$an^2 + bn + c = \Theta(n^2)$$

$$500n^2 + 100n^3 + 10^{-5}n^3 \log n = \Theta(n^3 \log n)$$



# Παραδείγματα

---

- $\Theta(1)$                        $a := b * c;$                       απλές εντολές
- $\Theta(\log n)$                $\text{if } x < A[n/2] \text{ search}(A[1, n/2]) \dots$       δυαδική αναζήτηση
- $\Theta(n)$                        $\text{for } i := 1 \text{ to } n \text{ do } \langle \Theta(1) \rangle$                       απλός βρόχος
- $\Theta(n \log n)$                $\text{mergesort}(A[1, n/2])$                       ταξινόμηση  
    $\text{mergesort}(A[n/2+1, n])$                       με συγχώνευση  
    $\text{merge}(A[1, n/2], A[n/2+1, n])$
- $\Theta(n^2)$                        $\text{for } i := 1 \text{ to } n \text{ do}$                       διπλός βρόχος  
    $\text{for } j := 1 \text{ to } n \text{ do } \langle \Theta(1) \rangle$
- $\Theta(2^n)$                        $\text{for all } S \subseteq \{0, 1\}^n \text{ do } \langle \Theta(1) \rangle$                       υποσύνολα
- $\Theta(n!)$                        $\text{for all } \sigma \text{ in } S[n] \text{ do } \langle \Theta(1) \rangle$                       μεταθέσεις

# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός O

□  $O(\ )$  δηλώνει **άνω φράγμα** στην τάξη μεγέθους.

$f(n) \in O(g(n))$  ή  $f(n) = O(g(n))$  αν  $\exists$  σταθερές  $c, n_0 > 0$ :

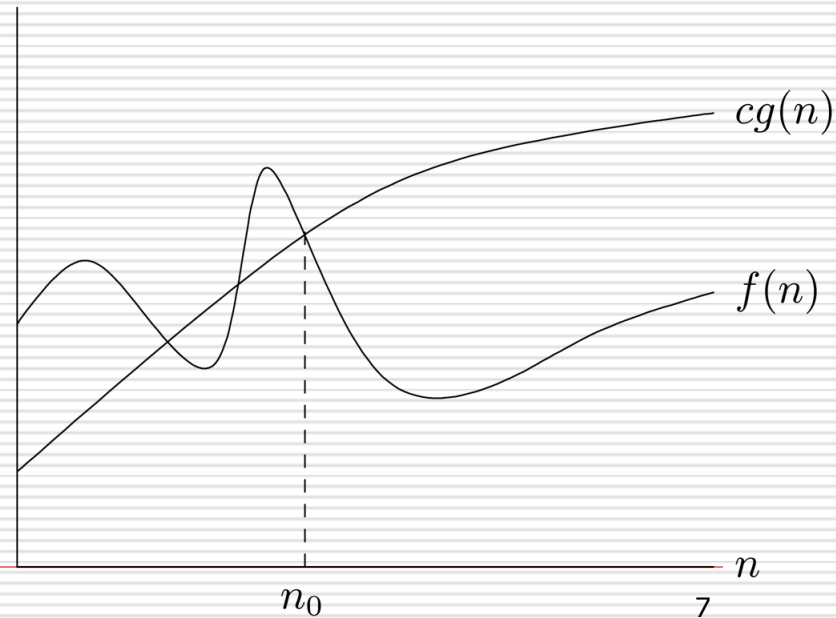
$$\forall n \geq n_0, f(n) \leq c g(n)$$

- $O(g(n))$  **σύνολο** συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που **δεν υπερβαίνει** τάξη μεγέθους  $g(n)$ .

$$100n^3 + 10^{-5}n^3 \log n = O(n^3 \log n) = O(n^4)$$

$$10^{-10}n^2 \notin O(n)$$

- Χρησιμοποιείται συχνά αντί του  $\Theta$  (αν ενδιαφέρει μόνο άνω φράγμα)



# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός $o$

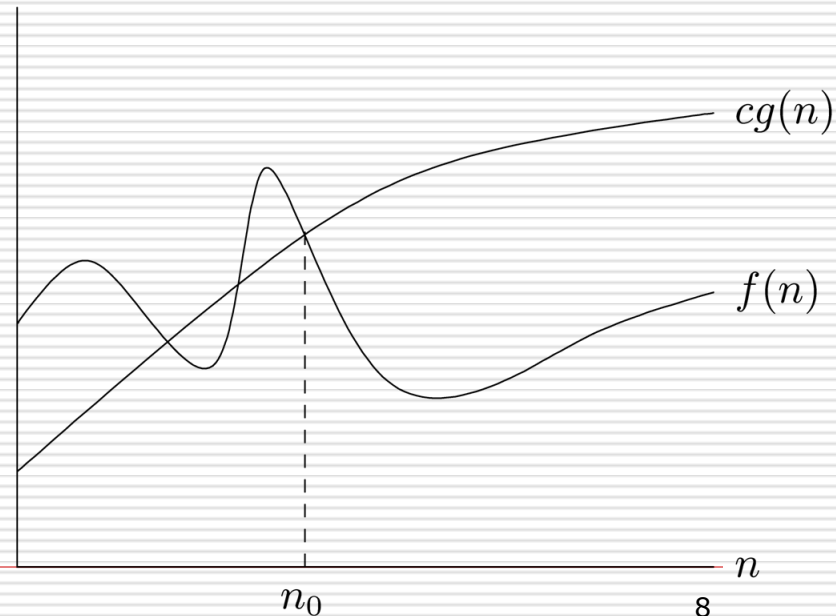
- $o(\ )$  δηλώνει **άνω φράγμα** στην τάξη μεγέθους που δεν είναι ακριβές (υπερεκτίμηση).

$$f(n) \in o(g(n)) \text{ ή } f(n) = o(g(n)) \text{ ανν } \forall c > 0, \exists n_0 > 0: \\ \forall n \geq n_0, f(n) < c g(n) \text{ ή } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

- $o(g(n))$  **σύνολο** συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που **υπολείπεται σημαντικά** τάξης μεγέθους  $g(n)$ .

$$5n^3 \log n = o(n^4)$$

$$10n^2 \notin o(n^2).$$





# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός $\Omega$

□  $\Omega(\ )$  δηλώνει **κάτω φράγμα** στην τάξη μεγέθους.

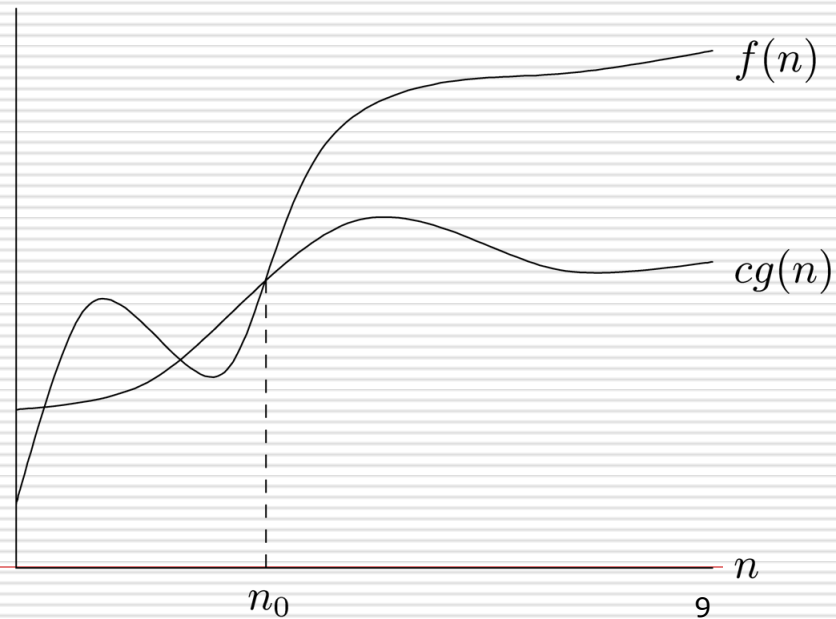
$f(n) \in \Omega(g(n))$  ή  $f(n) = \Omega(g(n))$  αν  $\exists$  σταθερές  $c, n_0 > 0$ :

$$\forall n \geq n_0, f(n) \geq c g(n)$$

- $\Omega(g(n))$  σύνολο συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που **δεν υπολείπεται** τάξης μεγέθους  $g(n)$ .

$$10^{-5}n^3 \log n = \Omega(n^3 \log n) = \Omega(n^3)$$

$$10^{10}n \notin \Omega(n^2).$$



# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός $\omega$

- $\omega(\ )$  δηλώνει **κάτω φράγμα** στην τάξη μεγέθους που δεν είναι ακριβές (υποεκτίμηση).

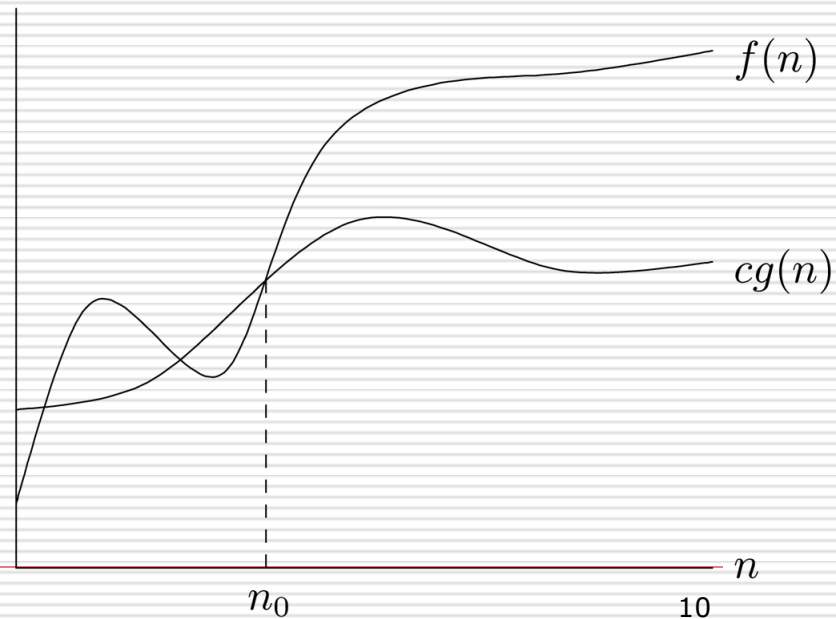
$f(n) \in \omega(g(n))$  ή  $f(n) = \omega(g(n))$  ανν  $\forall c > 0, \exists n_0 > 0$ :

$$\forall n \geq n_0, f(n) > c g(n) \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

- $\omega(g(n))$  **σύνολο** συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που **υπερβαίνει σημαντικά** τάξης μεγέθους  $g(n)$ .

$$5n^3 \log n = \omega(n^3)$$

$$10n^2 \neq \omega(n^2).$$



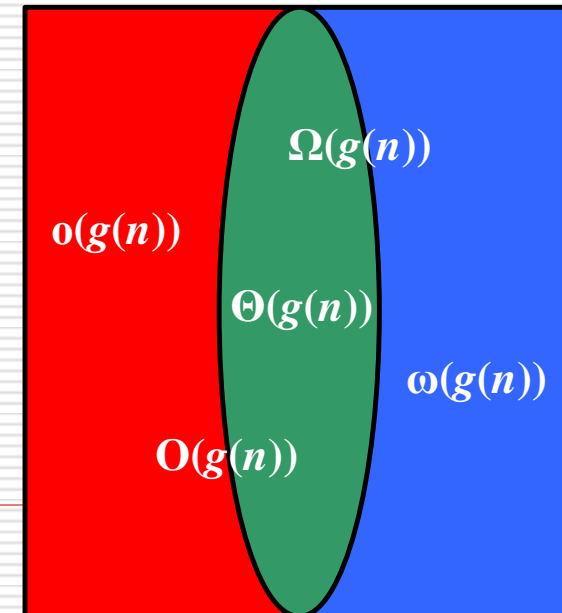
# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

- $f(n) = \Theta(g(n)) \sim$  ασυμπτωτικά  $f(n) = g(n)$   
 $f(n) = O(g(n)) \sim$  ασυμπτωτικά  $f(n) \leq g(n)$   
 $f(n) = o(g(n)) \sim$  ασυμπτωτικά  $f(n) \ll g(n)$   
 $f(n) = \Omega(g(n)) \sim$  ασυμπτωτικά  $f(n) \geq g(n)$   
 $f(n) = \omega(g(n)) \sim$  ασυμπτωτικά  $f(n) \gg g(n)$

- Κάποιες απλές σχέσεις:

- $O(g(n)) = o(g(n)) \cup \Theta(g(n))$  \*
- $\Omega(g(n)) = \omega(g(n)) \cup \Theta(g(n))$  \*
- $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
- $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$

\* για «φυσιολογικές» συναρτήσεις πολ/τας



# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

- Πολυώνυμο βαθμού  $d$ :  $a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + a_1 n + a_0 = \Theta(n^d)$
- Κάποια αθροίσματα:

$$\sum_{i=1}^n i = \Theta(n^2), \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \Theta(n^3), \dots, \quad \sum_{i=1}^n i^k = \Theta(n^{k+1})$$

$$\sum_{i=1}^n 1/i = \Theta(\log n), \quad \sum_{i=1}^n 2^i = \Theta(2^n)$$

- Επίσης:  $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
- Ιεράρχηση:  $O(1) \subset O(\log^* n) \subset O(\log n) \subset O(\text{poly}(\log n)) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(\text{poly}(n)) \subset O(n^{\log n}) \subset O(2^n) \subset O(3^n) \subset O(n!) \subset O(n^n) \subset O(A(n))$

# Κάποιες Ασκήσεις

---

- Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;
- $10 f(n) + 10^{100} = O(f(n))$  Αληθής
  - $f(n) + g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$  Ψευδής
  - $f(n) + g(n) = \Omega(\min\{f(n), g(n)\})$  Αληθής
  - $f(n) + g(n) = O(\max\{f(n), g(n)\})$  Αληθής

# Κάποιες Ασκήσεις

□ Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

$f(n)$	$g(n)$	$\Theta(g(n))$	$O(g(n))$	$o(g(n))$	$\Omega(g(n))$	$\omega(g(n))$
$2^{n+5}$	$2^n + 2^5 + n^{100}$	■	■		■	
$n^4 - n^3$	$16^{\log n}$	■	■		■	
$5^{4n}$	$10^{2n}$				■	■
$n^{1/\log \log n}$	$n^{0.001}$		■	■		
$n!$	$n^n$		■	■		
$n^{\log^{20} n}$	$2^n$		■	■		

# Κάποιες Ασκήσεις

- Να βάλετε συναρτήσεις σε **αύξουσα σειρά** τάξης μεγέθους:

$$\begin{array}{ccccc} 2^{5n} & \log^4 n & (\log n)^{100} \log \log n & n \log \log n & n^{0.1} \log \log n \\ 2^n & n^{0.6} & 2^n + n^{2^{100}} & n^{1/\log n} & \log(n!) \\ n^{\log n} & \log \log n & 2^{\log^3 n} & \frac{n}{\log_n 2} + n & (\log n)^{\log n} \end{array}$$

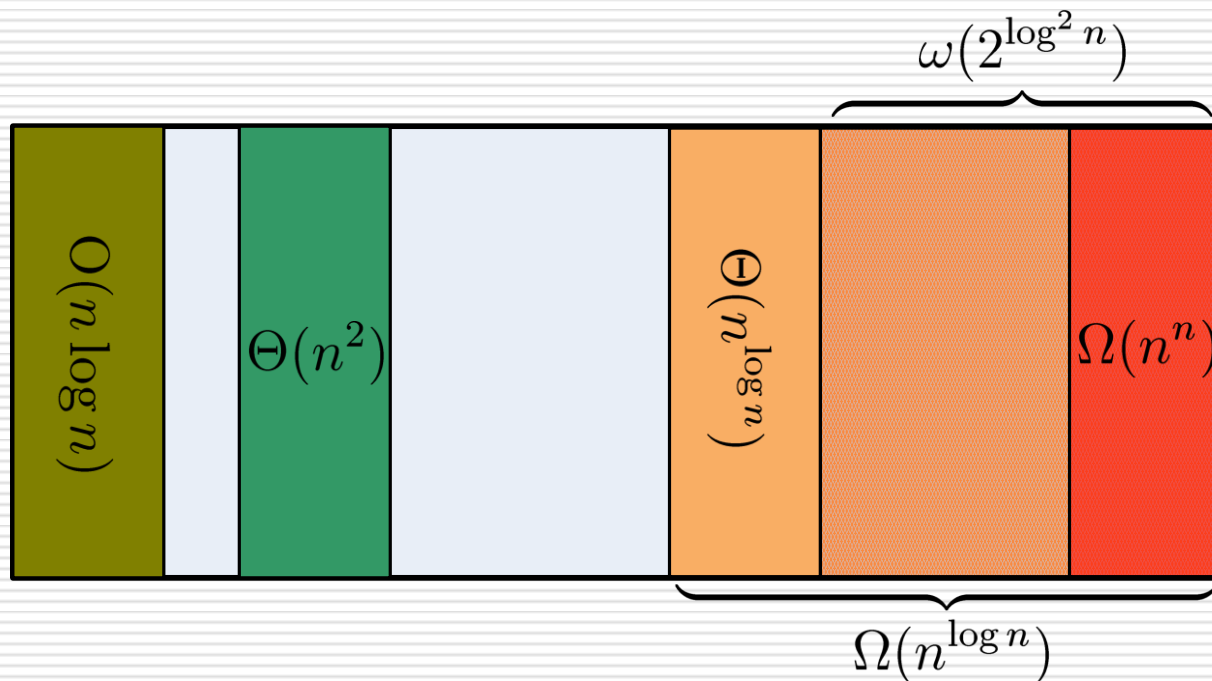
- Απάντηση:

$$\begin{aligned} n^{1/\log n} &= \Theta(1), \quad \log \log n, \quad \log^4 n, \quad (\log n)^{100} \log \log n, \\ & n^{0.1} \log \log n, \quad n^{0.6}, \\ n \log \log n, \quad \log(n!) &= \Theta(n \log n), \quad \frac{n}{\log_n 2} + n = \Theta(n \log n), \\ (\log n)^{\log n} &= \Theta(n^{\log \log n}), \quad n^{\log n}, \quad 2^{\log^3 n} = \Theta(n^{\log^2 n}), \\ 2^n, \quad 2^n + n^{2^{100}} &= \Theta(2^n), \quad 2^{5n} \end{aligned}$$

# Κάποιες Ασκήσεις

- Σχεδιάστετε διάγραμμα Venn για τις κλάσεις συναρτήσεων:

$$\Omega(n^n), \Theta(n^{\log n}), \omega(2^{\log^2 n}), \Omega(n^{\log n}), \Theta(n^2), O(n \log n)$$





# Πρακτικά Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

- ... έχουν **πολυωνυμική** (χρονική) πολυπλοκότητα.
  - Π.χ.  $\log n$ ,  $n$ ,  $n \log n$ ,  $n^2$ ,  $n^3$ , ...
  - Χρόνοι  $n^d$ , όπου  $d$  **μεγάλο**, σπάνιοι και βελτιώνονται.
- **Εκθετική** πολυπλοκότητα **απαγορευτική** για μεγάλα στιγμιότυπα! Π.χ.  $100n^2 < 2^{n/5}$  για κάθε  $n \geq 100$

Αύξηση **μεγεθών που λύνουμε** σε συγκεκριμένο χρόνο όταν **10πλασιάζεται** η ταχύτητα υπολογιστή:

Πολυπλ.	$n$	$n'$ μετά	Λόγος
$100 \log n$	$2^{100}$	$2^{1000}$	$2^{900}$
$10n$	1000	10000	10
$1000n$	10	100	10
$10n \log n$	140	1003	7.16
$5n^2$	44	141	$\sqrt{10} = 3.16$
$2^n$	13	16	$1.25 (n' = n + \log 10)$

# Αποδοτική Επίλυση: Κλάση P

---

- Αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου λύνει **κάθε** στιγμιότυπο σε **χρόνο**  $O(n^d)$ ,  $d$  σταθερά.
- **Κλάση P** : προβλήματα απόφασης που επιλύονται από αλγόριθμους **πολυωνυμικού χρόνου**.
  - Reachability, shortest paths, MST, max flow, min cut, min-cost flow, perfect matching, linear programming, ...
- **Αξίωμα Cook-Karp** : κλάση **ευεπίλυτων** προβλημάτων ταυτίζεται με **κλάση P**.

# Αποδοτική Επίλυση: Κλάση P

---

- **Κλάση P** : προβλήματα που λύνονται σε **πολυωνυμικό χρόνο**.
  - Shortest paths, MST, max flow, min cut, min-cost flow, maximum matching, linear programming, ...
- **Θέση Cook-Karp** : **P** ταυτίζεται με **ευεπίλυτα προβλήματα**.
- Υπέρ θέσης Cook-Karp:
  - Συνήθως **πολυώνυμα μικρού βαθμού** (π.χ.  $n$ ,  $n^2$ ,  $n^3$ ).
  - ***Αν μπορείς να το γράψεις μπορείς και να το υπολογίσεις!***
  - Δεκαπλασιασμός υπολογιστικής ισχύος: σημαντική αύξηση στο μέγεθος στιγμιότυπων που επιλύουμε.
- Κριτική στη θέση Cook-Karp:
  - Ακραίες περιπτώσεις: θεωρείται πρακτικό το  $n^{100}$  αλλά όχι το  $2^{n/1000}$  !
  - Γραμμικός Προγραμματισμός: **Simplex vs. Ellipsoid**.

# Συνοψίζοντας

---

- Ασυμπτωτικός συμβολισμός: **εύχρηστο εργαλείο** για **περιγραφή πολυπλοκότητας** αλγορίθμων και προβλημάτων
- Αγνοεί σταθερές => ανεξαρτησία από υπολογιστικό σύστημα
- Εκφράζει τάξη **μεγέθους** και τάξη **ρυθμού αύξησης** πολυπλοκότητας ως προς μέγεθος εισόδου
- Ιεράρχηση:  $O(1) \subset O(\log^* n) \subset O(\log n) \subset O(\text{poly}(\log n)) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(\text{poly}(n)) \subset O(n^{\log n}) \subset O(2^n) \subset O(3^n) \subset O(n!) \subset O(n^n) \subset O(A(n))$
- Αποδοτική επίλυση:  **$O(\text{poly}(n))$**