Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι βασισμένοι σε Γραμμικό Προγραμματισμό

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Γενική Προσέγγιση

- Διατυπώνουμε το πρόβλημα ως Ακέραιο Γραμμικό Πρόγραμμα (IP).
  - Set Cover IP:

$$\begin{aligned} \min\ & \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j \\ \text{s.t. } & \textstyle\sum_{j: i \in X_j} x_j \geq 1 && \forall i \in S \\ & x_j \in \{0,1\} && \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- «Χαλαρώνουμε» το IP σε Γραμμικό Πρόγραμμα (LP).
  - Set Cover LP:

$$\begin{aligned} \min\ & \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j \\ \text{s.t. } & \textstyle\sum_{j: i \in X_j} x_j \geq 1 && \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 && \forall j \in [m] \end{aligned}$$

  - Integrality gap: $\max_{\sigma} \frac{\mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}(\sigma)}{\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}(\sigma)}$

Γενική Προσέγγιση

- Χρησιμοποιούμε τη βέλτιστη λύση του LP ή/και ιδιότητες της για να κατασκευάσουμε (σε πολυωνυμικό χρόνο) εφικτή λύση για το IP και να αναλύσουμε το λόγο προσέγγισης.
  - «Στρογγυλοποίηση» βέλτιστης λύσης LP: (deterministic και) randomized rounding.
  - Δυϊκότητα και χρέωση κόστους σε dual variables: dual fitting.
  - Δυϊκότητα και complementary slackness: primal-dual.
- Ανάλυση (προβλήματα ελαχιστοποίησης):
  - Άνω φράγμα στο κόστος εφικτής λύσης.
  - Κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης: βέλτιστη λύση LP ή εφικτή λύση για το δυϊκό.
  - Λόγος προσέγγισης $\geq$ integrality gap.
  - Μέθοδος δίνει (συχνά καλύτερο) άνω φράγμα στο λόγο προσέγγισης για κάθε συγκεκριμένο instance.

Set Cover: Στρογγυλοποίηση

$$\min \sum_{j=1}^{m} x_j w_j$$
$$\text{s.t.} \sum_{j: i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m]$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
  - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j με $x_j \geq 1/f$
- Η λύση μας είναι εφικτή:
  - $\forall$ στοιχείο i, αντίστοιχος περιορισμός έχει #μετ/τών $\leq$ f
  - Αφού άθροισμα $\geq$ 1, τουλάχιστον μία μετ/τή έχει τιμή $\geq$ 1/f
- Κάτω φράγμα:
  - Κόστος βέλτιστης (ακέραιης) λύσης $\geq$ OPT
- Άνω φράγμα:
  - Στρογγυλοποίηση αυξάνει τιμές μετ/των κατά παράγοντα $\leq$ f
  - Κόστος εφικτής λύσης $\leq$ f OPT
- Λόγος προσέγγισης $\leq$ f
  - Λόγος προσέγγισης $\leq$ 2 για vertex cover.

Set Cover: Randomized Rounding

$$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j & \\ \text{s.t.} \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 & \quad \forall i \in S \\ x_j \geq 0 & \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
  - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_j
  - Επαναλαμβάνουμε c ln(n) φορές, σταθερά c ≥ 2
- Η λύση μας είναι εφικτή (με μεγάλη πιθανότητα):
  - ∀ στοιχείο i, πιθανότητα να μην καλυφθεί το i ≤ $1/n^c$

$$\Pr[i \text{ not covered}] = \prod_{j:i\in X_j} (1-x_j)^{c\ln n}$$

$$\leq \prod_{j:i\in X_j} e^{-x_j c \ln n} = e^{-c\ln n \sum_{j:i\in X_j} x_j} \leq e^{-c\ln n} = 1/n^c$$

  - Πιθανότητα να υπάρχει στοιχείο ακάλυπτο ≤ $1/n^{c-1}$
- Κάτω φράγμα:
  - Κόστος βέλτιστης (ακέραιης) λύσης ≥ OPT

Set Cover: Randomized Rounding

$$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j & \\ \text{s.t.} \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 & \quad \forall i \in S \\ x_j \geq 0 & \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
  - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_j
  - Επαναλαμβάνουμε c ln(n) φορές, σταθερά c ≥ 2
- Άνω φράγμα (στο αναμενόμενο κόστος μιας **εφικτής** λύσης):
  - $\Pr[X_j \textbf{ included}] = 1 - (1 - x_j)^{c \ln n} \leq x_j c \ln n$
  - Αναμενόμενο κόστος «λύσης» (μπορεί μη εφικτή) ≤ c ln(n) OPT
  - Αναμενόμενο κόστος εφικτής λύσης ≤ c ln(n) OPT / Pr[λύση εφικτή]
- Λόγος προσέγγισης ≤ 2c ln(n)
  - Μετατροπή του αλγόριθμου σε ντετερμινιστικό (derandomization) με την μέθοδο των conditional probabilities.

Βασική Ιδέα (ελαχιστοποίηση)

- Ξεκινάμε από κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης.
  - Γενικά, κάτω φράγμα εκφράζεται σαν συνάρτηση κάποιων παραμέτρων του στιγμιότυπου εισόδου.
  - LP-based αλγόριθμοι: κάτω φράγμα προκύπτει από βέλτιστη λύση στο **LP relaxation** ή εφικτή λύση στο **δυϊκό**.
- (Πολυωνυμικός) αλγόριθμος: εφικτή λύση με κόστος ≤ μιας συνάρτησης των παραμέτρων στο κάτω φράγμα.
  - Για LP-based αλγόριθμους:
    - **Στρογγυλοποίηση** βέλτιστης (κλασματικής) λύσης LP relaxation σε ακέραια λύση.
    - «**Μετάφραση**» (μέσω complementary slackness) μιας εφικτής λύσης στο δυϊκό σε εφικτή ακέραια λύση για το πρωτεύον.
- Σύγκριση κάτω και άνω φράγματος δίνει (άνω φράγμα στο) λόγο προσέγγισης.

MAX-SAT και MAX-k-SAT

- MAX-k-SAT:
  - Λογικές μεταβλητές $p_1, \ldots, p_n$
  - Όροι $C_1, \ldots, C_m$ με βάρη $w_1, \ldots, w_m$
    Κάθε όρος είναι μια διάζευξη k μετ/τών ή αρνήσεών τους.
  - Στόχος: αποτίμηση μεταβλητών που ικανοποιεί όρους
    με μέγιστο συνολικό βάρος.
- MAX-SAT (χωρίς περιορισμό στο #literals κάθε όρου):
  - Κάθε όρος είναι μια διάζευξη μιας ή περισσότερων μετ/τών ή αρνήσεών τους.
- MAX-SAT και MAX-k-SAT, $k \geq 2$, είναι NP-complete προβλήματα.
  - MAX-3-SAT έχει λόγο προσέγγισης 7/8 (εκτός αν P = NP)!
  - MAX-k-SAT έχει λόγο προσέγγισης $\geq 1 - 2^{-k}$
  - MAX-SAT έχει λόγο προσέγγισης $\geq 3/4$

MAX-SAT και MAX-k-SAT: (Απλοϊκό) Randomized Rounding

- $\forall$ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα 1/2
  - (Κάθε) λύση είναι εφικτή.
  - Άνω φράγμα για βέλτιστη λύση: συνολικό βάρος W των όρων.
  - Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας:
    - Έστω α, $0 < \alpha < 1$, τ.ω. $\forall$ όρο C_j, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \alpha$
    - Λόγω γραμμικότητας μέσης τιμής, συνολικό βάρος λύσης $\geq \alpha W$
- MAX-k-SAT:
  - $\forall$ όρο C_j, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] = 1 - 2^{-k}$
  - Λόγος προσέγγισης $\geq 1 - 2^{-k}$
- MAX-SAT:
  - $\forall$ όρο C_j, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1/2$, αφού $|C_j| \geq 1$
  - Λόγος προσέγγισης $\geq 1/2$
- Derandomization με μέθοδο conditional probabilities.

MAX-SAT: Randomized Rounding

- Χρειαζόμαστε καλύτερο άνω φράγμα στη βέλτιστη λύση!
- Διατύπωση ως IP και «χαλάρωση» σε LP.

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{m} z_j w_j & \\
\text{s.t.} & \sum_{i \in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j} (1 - x_i) \geq z_j & \forall C_j = \bigvee_{i \in P_j} p_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \neg p_i \\
 & x_i \in \{0, 1\} \quad 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \\
 & 0 \leq z_j \leq 1 & \forall j \in [m]
\end{array}
$$

- Έστω (x, z) βέλτιστη λύση LP με βάρος $\mathrm{OPT} = \sum_{j=1}^{m} z_j w_j$
- $\forall$ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_i
  - Άνω φράγμα για βέλτιστη λύση: OPT
  - Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας:
    - Έστω α, 0 < α < 1, τ.ω. $\forall$ όρο C_j, $|C_j| = k_j$, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \alpha z_j$
    - Λόγω γραμμικότητας μέσης τιμής, συνολικό βάρος λύσης $\geq$ α OPT

MAX-SAT: Randomized Rounding

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{m} z_j w_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j} (1 - x_i) \geq z_j & \forall C_j = \bigvee_{i \in P_j} p_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \neg p_i \\ & 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \\ & 0 \leq z_j \leq 1 & \forall j \in [m] \end{array}$$

- ∀ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_i
  - Έστω α, 0 < α < 1, τ.ω. ∀ όρο C_j, $|C_j| = k_j$, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \alpha z_j$

$$\Pr[C_j \text{ not satisfied}] = \prod_{i \in P_j} (1 - x_i) \prod_{i \in N_j} x_i$$

$$\leq \left[\frac{1}{k_j} \left(\sum_{i \in P_j} (1 - x_i) + \sum_{i \in N_j} x_i \right) \right]^{k_j}$$

$$\leq \left(1 - \frac{z_j}{k_j} \right)^{k_j} \leq e^{-z_j}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \alpha_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

$$\sum_{i \in P_j} (1 - x_i) + \sum_{i \in N_j} x_i \leq k_j - z_j$$

MAX-SAT: Randomized Rounding

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^m z_j w_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{i\in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j}(1-x_i) \geq z_j & \forall C_j = \bigvee_{i\in P_j} p_i \vee \bigvee_{i\in N_j} \neg p_i \\ & 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \\ & 0 \leq z_j \leq 1 & \forall j \in [m] \end{array}$$

- ∀ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_i
  - Έστω α, 0 < α < 1, τ.ω. ∀ όρο C_j, $|C_j| = k_j$, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \alpha\, z_j$

$$\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1 - e^{-z_j} \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) z_j \qquad \forall z \in [0,1],\ 1 - e^{-z} \geq (1 - \tfrac{1}{e}) z$$

  - Πιο προσεκτική ανάλυση: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right] z_j$
- Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας: (1 – 1/e) OPT
  - Λόγος προσέγγισης ≥ 1 – 1/e

MAX-SAT: Συνδυασμένο Randomized Rounding

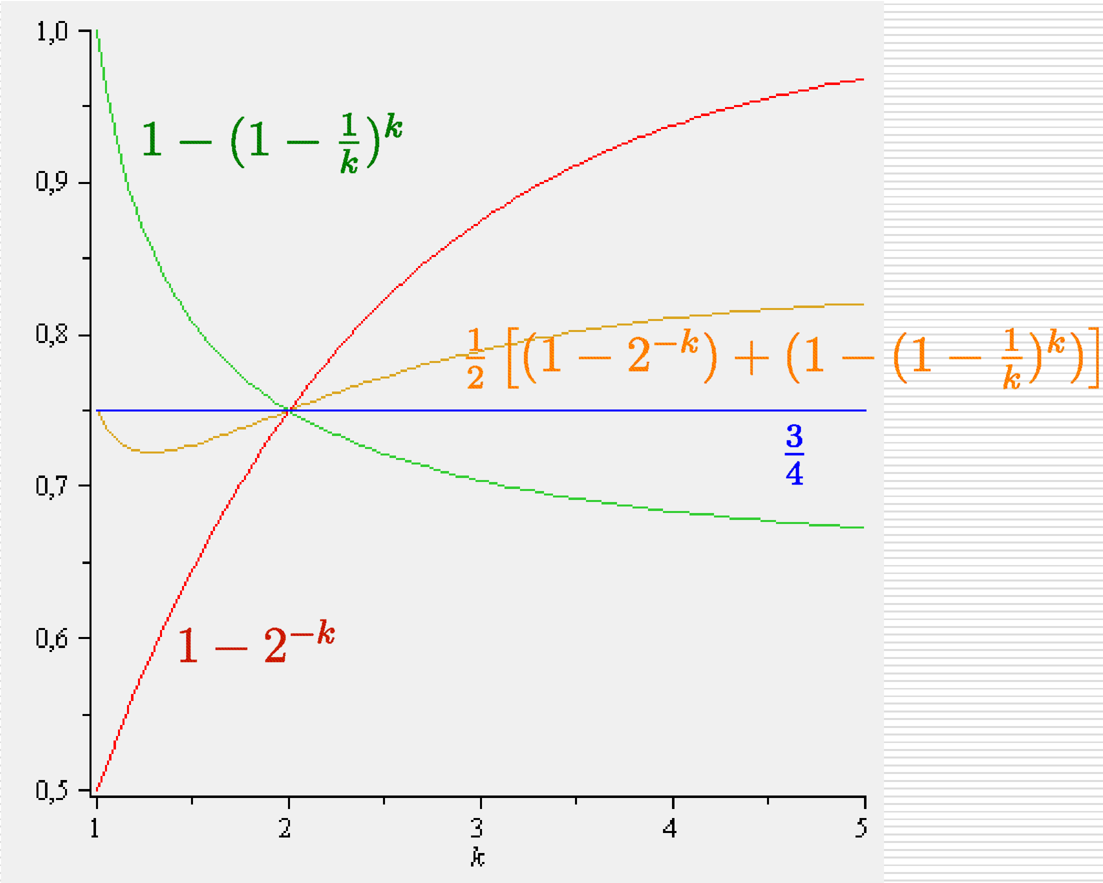
- «Απλοϊκό» rand. rounding: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1 - 2^{-k_j} \geq (1 - 2^{-k_j}) z_j$
- LP-based rand. rounding: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right] z_j$
  - Συμπληρωματική συμπεριφορά: «απλοϊκό» καλύτερο για μεγάλους όρους, LP-based καλύτερο για μικρούς όρους!
- Επιστρέφουμε την καλύτερη από τις λύσεις των δύο αλγόριθμων.
  - Έστω W_1 και W_2 αναμενόμενο βάρος από «απλοϊκό» και LP-based.
  - Αναμενόμενο βάρος λύσης: $E[\max(W_1, W_2)] \geq E[(W_1+W_2)/2]$
  - Κάθε όρος C_j συνεισφέρει στο $E[(W_1+W_2)/2]$ βάρος τουλάχιστον:

$$\frac{1}{2}\left[(1 - 2^{-k}) + (1 - (1 - \tfrac{1}{k})^k)\right] z_j w_j \geq 3 z_j w_j / 4\,,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

  - Από γραμμικότητα μέσης τιμής, αναμενόμενο βάρος λύσης $\geq$ 3 OPT / 4
  - Λόγος προσέγγισης $\geq 3/4$

MAX-SAT: Συνδυασμένο Randomized Rounding

- Γραφική απόδειξη ότι $\frac{1}{2}\left[(1-2^{-k})+(1-(1-\frac{1}{k})^k)\right] \geq 3/4\,,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$



MAX-CUT

- Μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E, w) με m ακμές, κάθε ακμή {u, v} έχει βάρος $w_{uv} \geq 0$.
- Τομή: διαμέριση κορυφών (S, V \ S) με $\emptyset \neq S \subset V$.
  - Σύνολο ακμών που αφαίρεσή τους δημιουργεί τουλ. 2 συνεκτικές συνιστώσες.
  - Βάρος τομής $W(S, V \setminus S) = \sum_{u \in S, v \notin S} w_{uv}$
- Πρόβλημα: υπολογισμός μιας τομής μέγιστου βάρους.
  - NP-complete, αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 0.878 [Goemans, Williamson, 94], randomized rounding σε SDP.
  - NP-complete η προσέγγισή του με λόγο > 16/17!

$$\begin{aligned} \max & \sum_{u,v \in V} (x_u + x_v - 2x_u x_v) w_{uv} \\ \text{s.t.} & \quad x_u \in \{0,1\} \quad \forall u \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max & \quad \sum_{u,v \in V} z_{uv} w_{uv} & \\ \text{s.t.} & \quad z_{uv} \leq 2 - x_u - x_v & \forall u, v \in V \\ & \quad z_{uv} \leq x_u + x_v & \forall u, v \in V \\ & \quad x_u, z_{uv} \in \{0,1\} & \forall u, v \in V \\ & \quad 0 \leq x_u, z_{uv} \leq 1 & \end{aligned}$$

MAX-CUT

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{u,v\in V} z_{uv} w_{uv} & \\ \text{s.t.} & z_{uv} \leq 2 - x_u - x_v & \forall u,v \in V \\ & z_{uv} \leq x_u + x_v & \forall u,v \in V \\ & 0 \leq x_u, z_{uv} \leq 1 & \forall u,v \in V \end{array}$$

- Άνω φράγμα στη βέλτιστη λύση: συνολικό βάρος ακμών W.
- (Απλός) αλγόριθμος: κάθε κορυφή u εντάσσεται στο S ανεξάρτητα με πιθανότητα 1/2 (διαφορετικά στο V \ S).
  - X βάρος ακμών στην τομή (S, V \ S) (τυχαία μεταβλητή).
  - Ακμή {u, v} «διασχίζει» τομή (S, V \ S) με πιθανότητα 1/2.
  - Αναμενόμενο βάρος ακμών στην τομή (S, V \ S): E[X] = W/2 (γραμμικότητα μέσης τιμής).
  - Λόγος προσέγγισης 1/2.
  - Μετατροπή σε ντετερμινιστικό με conditional probabilities.
    - Ποιος είναι ο αντίστοιχος ντετερμινιστικός αλγόριθμος;
- Γενίκευση για MAX-k-CUT, λόγος προσέγγισης 1 – 1/k.