Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι βασισμένοι σε Γραμμικό Προγραμματισμό

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Γενική Προσέγγιση

- Διατυπώνουμε το πρόβλημα ως Ακέραιο Γραμμικό Πρόγραμμα (IP).
  - Set Cover IP:

$$\begin{aligned} \min \ & \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j \\ \text{s.t.} \ & \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 \quad && \forall i \in S \\ & x_j \in \{0,1\} && \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- «Χαλαρώνουμε» το IP σε Γραμμικό Πρόγραμμα (LP).
  - Set Cover LP:

$$\begin{aligned} \min \ & \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j \\ \text{s.t.} \ & \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 \quad && \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 && \forall j \in [m] \end{aligned}$$

  - Integrality gap: $\max_{\sigma} \dfrac{\mathrm{OPT}_{\mathrm{IP}}(\sigma)}{\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}(\sigma)}$

Γενική Προσέγγιση

- Χρησιμοποιούμε τη βέλτιστη λύση του LP ή/και ιδιότητες της για να κατασκευάσουμε (σε πολυωνυμικό χρόνο) εφικτή λύση για το IP και να αναλύσουμε το λόγο προσέγγισης.
  - «Στρογγυλοποίηση» βέλτιστης λύσης LP: (deterministic και) randomized rounding.
  - Δυϊκότητα και χρέωση κόστους σε dual variables: dual fitting.
  - Δυϊκότητα και complementary slackness: primal-dual.
- Ανάλυση (προβλήματα ελαχιστοποίησης):
  - Άνω φράγμα στο κόστος εφικτής λύσης.
  - Κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης: βέλτιστη λύση LP ή εφικτή λύση για το δυϊκό.
  - Λόγος προσέγγισης $\geq$ integrality gap.
  - Μέθοδος δίνει (συχνά καλύτερο) άνω φράγμα στο λόγο προσέγγισης για κάθε συγκεκριμένο instance.

Set Cover: Στρογγυλοποίηση

$$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j & \\ \text{s.t. } \textstyle\sum_{j: i \in X_j} x_j \geq 1 & \quad \forall i \in S \\ x_j \geq 0 & \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
  - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j με $x_j \geq 1/f$
- Η λύση μας είναι εφικτή:
  - ∀ στοιχείο i, αντίστοιχος περιορισμός έχει #μετ/τών ≤ f
  - Αφού άθροισμα ≥ 1, τουλάχιστον μία μετ/τή έχει τιμή ≥ 1/f
- Κάτω φράγμα:
  - Κόστος βέλτιστης (ακέραιης) λύσης ≥ OPT
- Άνω φράγμα:
  - Στρογγυλοποίηση αυξάνει τιμές μετ/των κατά παράγοντα ≤ f
  - Κόστος εφικτής λύσης ≤ f OPT
- Λόγος προσέγγισης ≤ f
  - Λόγος προσέγγισης ≤ 2 για vertex cover.

Set Cover: Randomized Rounding

$$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j & \\ \text{s.t.} \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 & \quad \forall i \in S \\ x_j \geq 0 & \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
  - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_j
  - Επαναλαμβάνουμε c ln(n) φορές, σταθερά c ≥ 2
- Η λύση μας είναι εφικτή (με μεγάλη πιθανότητα):
  - ∀ στοιχείο i, πιθανότητα να μην καλυφθεί το i ≤ $1/n^c$

$$\Pr[i \text{ not covered}] = \prod_{j:i\in X_j} (1-x_j)^{c\ln n}$$

$$\leq \prod_{j:i\in X_j} e^{-x_j c \ln n} = e^{-c\ln n \sum_{j:i\in X_j} x_j} \leq e^{-c\ln n} = 1/n^c$$

  - Πιθανότητα να υπάρχει στοιχείο ακάλυπτο ≤ $1/n^{c-1}$
- Κάτω φράγμα:
  - Κόστος βέλτιστης (ακέραιης) λύσης ≥ OPT

Set Cover: Randomized Rounding

$$\begin{aligned} \min & \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j & \\ \text{s.t.} & \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 & \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 & \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
  - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_j
  - Επαναλαμβάνουμε c ln(n) φορές, σταθερά c ≥ 2
- Άνω φράγμα (στο αναμενόμενο κόστος μιας **εφικτής** λύσης):
  - $\Pr[X_j \textbf{ included}] = 1 - (1-x_j)^{c\ln n} \leq x_j c \ln n$
  - Αναμενόμενο κόστος «λύσης» (μπορεί μη εφικτή) ≤ c ln(n) OPT
  - Αναμενόμενο κόστος εφικτής λύσης ≤ c ln(n) OPT / Pr[λύση εφικτή]
- Λόγος προσέγγισης ≤ 2c ln(n)
  - Μετατροπή του αλγόριθμου σε ντετερμινιστικό (derandomization) με την μέθοδο των conditional probabilities.

Βασική Ιδέα (ελαχιστοποίηση)

- Ξεκινάμε από κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης.
  - Γενικά, κάτω φράγμα εκφράζεται σαν συνάρτηση κάποιων παραμέτρων του στιγμιότυπου εισόδου.
  - LP-based αλγόριθμοι: κάτω φράγμα προκύπτει από βέλτιστη λύση στο **LP relaxation** ή εφικτή λύση στο **δυϊκό**.
- (Πολυωνυμικός) αλγόριθμος: εφικτή λύση με κόστος ≤ μιας συνάρτησης των παραμέτρων στο κάτω φράγμα.
  - Για LP-based αλγόριθμους:
    - **Στρογγυλοποίηση** βέλτιστης (κλασματικής) λύσης LP relaxation σε ακέραια λύση.
    - «**Μετάφραση**» (μέσω complementary slackness) μιας εφικτής λύσης στο δυϊκό σε εφικτή ακέραια λύση για το πρωτεύον.
- Σύγκριση κάτω και άνω φράγματος δίνει (άνω φράγμα στο) λόγο προσέγγισης.

MAX-SAT και MAX-k-SAT

- MAX-k-SAT:
  - Λογικές μεταβλητές $p_1, \ldots, p_n$
  - Όροι $C_1, \ldots, C_m$ με βάρη $w_1, \ldots, w_m$
    Κάθε όρος είναι μια διάζευξη k μετ/τών ή αρνήσεών τους.
  - Στόχος: αποτίμηση μεταβλητών που ικανοποιεί όρους
    με μέγιστο συνολικό βάρος.
- MAX-SAT (χωρίς περιορισμό στο #literals κάθε όρου):
  - Κάθε όρος είναι μια διάζευξη μιας ή περισσότερων μετ/τών ή αρνήσεών τους.
- MAX-SAT και MAX-k-SAT, $k \geq 2$, είναι NP-complete προβλήματα.
  - MAX-3-SAT έχει λόγο προσέγγισης 7/8 (εκτός αν P = NP)!
  - MAX-k-SAT έχει λόγο προσέγγισης $\geq 1 - 2^{-k}$
  - MAX-SAT έχει λόγο προσέγγισης $\geq 3/4$

MAX-SAT και MAX-k-SAT: (Απλοϊκό) Randomized Rounding

- ∀ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα 1/2
  - (Κάθε) λύση είναι εφικτή.
  - Άνω φράγμα για βέλτιστη λύση: συνολικό βάρος W των όρων.
  - Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας:
    - Έστω α, $0 < \alpha < 1$, τ.ω. ∀ όρο C_j, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \alpha$
    - Λόγω γραμμικότητας μέσης τιμής, συνολικό βάρος λύσης $\geq \alpha W$
- MAX-k-SAT:
  - ∀ όρο C_j, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] = 1 - 2^{-k}$
  - Λόγος προσέγγισης $\geq 1 - 2^{-k}$
- MAX-SAT:
  - ∀ όρο C_j, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1/2$, αφού $|C_j| \geq 1$
  - Λόγος προσέγγισης $\geq 1/2$
- Derandomization με μέθοδο conditional probabilities.

MAX-SAT: Randomized Rounding

- Χρειαζόμαστε καλύτερο άνω φράγμα στη βέλτιστη λύση!
- Διατύπωση ως IP και «χαλάρωση» σε LP.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{m} z_j w_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j} (1 - x_i) \geq z_j & \forall C_j = \bigvee_{i \in P_j} p_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \neg p_i \\ & x_i \in \{0,1\} \;/\; 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \\ & 0 \leq z_j \leq 1 & \forall j \in [m] \end{array}$$

- Έστω (x, z) βέλτιστη λύση LP με βάρος $\mathrm{OPT} = \sum_{j=1}^{m} z_j w_j$
- $\forall$ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_i
  - Άνω φράγμα για βέλτιστη λύση: OPT
  - Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας:
    - Έστω α, 0 < α < 1, τ.ω. $\forall$ όρο C_j, $|C_j| = k_j$, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \alpha\, z_j$
    - Λόγω γραμμικότητας μέσης τιμής, συνολικό βάρος λύσης $\geq$ α OPT

MAX-SAT: Randomized Rounding

$$\begin{array}{llr} \max & \sum_{j=1}^{m} z_j w_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{i\in P_j} x_i + \sum_{i\in N_j}(1-x_i) \ge z_j & \forall C_j = \bigvee_{i\in P_j} p_i \vee \bigvee_{i\in N_j} \neg p_i \\ & 0 \le x_i \le 1 & \forall i \in [n] \\ & 0 \le z_j \le 1 & \forall j \in [m] \end{array}$$

- ∀ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_i
  - Έστω α, 0 < α < 1, τ.ω. ∀ όρο C_j, $|C_j| = k_j$, Pr[C_j satisfied] ≥ α z_j

$$\begin{aligned} \Pr[C_j \text{ not satisfied}] &= \prod_{i\in P_j}(1-x_i)\prod_{i\in N_j} x_i \\ &\le \left[\frac{1}{k_j}\left(\sum_{i\in P_j}(1-x_i)+\sum_{i\in N_j} x_i\right)\right]^{k_j} \\ &\le \left(1-\frac{z_j}{k_j}\right)^{k_j} \le e^{-z_j} \end{aligned}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\alpha_i\right)^{\frac{1}{k}} \le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$$

$$\sum_{i\in P_j}(1-x_i)+\sum_{i\in N_j} x_i \le k_j - z_j$$

MAX-SAT: Randomized Rounding

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{m} z_j w_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j} (1 - x_i) \geq z_j & \forall C_j = \bigvee_{i \in P_j} p_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \neg p_i \\ & 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \\ & 0 \leq z_j \leq 1 & \forall j \in [m] \end{array}$$

- ∀ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_i
  - Έστω α, 0 < α < 1, τ.ω. ∀ όρο C_j, $|C_j| = k_j$, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \alpha z_j$

$$\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1 - e^{-z_j}$$

$$\forall z \in [0,1],\ \ 1 - e^{-z} \geq (1 - \tfrac{1}{e}) z$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) z_j$$

  - Πιο προσεκτική ανάλυση: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right] z_j$

- Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας: (1 – 1/e) OPT
  - Λόγος προσέγγισης ≥ 1 – 1/e

MAX-SAT: Συνδυασμένο Randomized Rounding

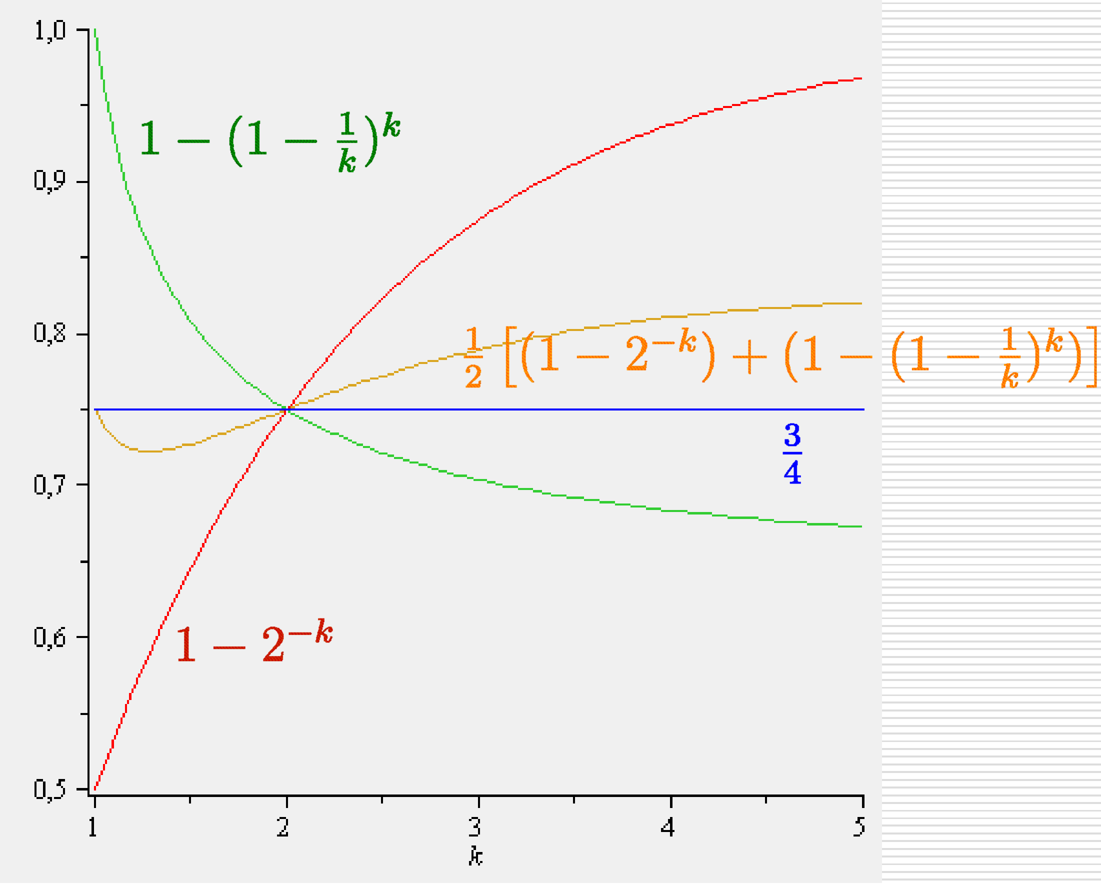
- «Απλοϊκό» rand. rounding: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1 - 2^{-k_j} \geq (1 - 2^{-k_j}) z_j$
- LP-based rand. rounding: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right] z_j$
  - Συμπληρωματική συμπεριφορά: «απλοϊκό» καλύτερο για μεγάλους όρους, LP-based καλύτερο για μικρούς όρους!
- Επιστρέφουμε την καλύτερη από τις λύσεις των δύο αλγόριθμων.
  - Έστω W_1 και W_2 αναμενόμενο βάρος από «απλοϊκό» και LP-based.
  - Αναμενόμενο βάρος λύσης: $E[\max(W_1, W_2)] \geq E[(W_1+W_2)/2]$
  - Κάθε όρος C_j συνεισφέρει στο $E[(W_1+W_2)/2]$ βάρος τουλάχιστον:

$$\frac{1}{2}\left[(1 - 2^{-k}) + (1 - (1 - \tfrac{1}{k})^k)\right] z_j w_j \geq 3 z_j w_j / 4 \,,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

  - Από γραμμικότητα μέσης τιμής, αναμενόμενο βάρος λύσης $\geq$ 3 OPT / 4
  - Λόγος προσέγγισης $\geq 3/4$

MAX-SAT: Συνδυασμένο Randomized Rounding

- Γραφική απόδειξη ότι $\frac{1}{2}\left[(1-2^{-k})+(1-(1-\frac{1}{k})^k)\right] \geq 3/4\,,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$



MAX-CUT

- Μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E, w) με m ακμές, κάθε ακμή {u, v} έχει βάρος $w_{uv} \geq 0$.
- Τομή: διαμέριση κορυφών (S, V \ S) με $\emptyset \neq S \subset V$.
  - Σύνολο ακμών που αφαίρεσή τους δημιουργεί τουλ. 2 συνεκτικές συνιστώσες.
  - Βάρος τομής $W(S, V \setminus S) = \sum_{u \in S, v \notin S} w_{uv}$
- Πρόβλημα: υπολογισμός μιας τομής μέγιστου βάρους.
  - NP-complete, αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 0.878 [Goemans, Williamson, 94], randomized rounding σε SDP.
  - NP-complete η προσέγγισή του με λόγο > 16/17!

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{u,v \in V} (x_u + x_v - 2x_u x_v) w_{uv} \\
\text{s.t.} & x_u \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{max} & \sum_{u,v \in V} z_{uv} w_{uv} & \\
\textbf{s.t.} & z_{uv} \leq 2 - x_u - x_v & \forall u, v \in V \\
 & z_{uv} \leq x_u + x_v & \forall u, v \in V \\
 & x_u, z_{uv} \in \{0, 1\} & \forall u, v \in V \\
 & 0 \leq x_u, z_{uv} \leq 1 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{u,v \in V} z_{uv} w_{uv} & \\ \text{s.t.} & z_{uv} \le 2 - x_u - x_v & \forall u, v \in V \\ & z_{uv} \le x_u + x_v & \forall u, v \in V \\ & 0 \le x_u, z_{uv} \le 1 & \forall u, v \in V \end{array}$$

MAX-CUT

- Άνω φράγμα στη βέλτιστη λύση: συνολικό βάρος ακμών W.
- (Απλός) αλγόριθμος: κάθε κορυφή u εντάσσεται στο S ανεξάρτητα με πιθανότητα 1/2 (διαφορετικά στο V \ S).
  - X βάρος ακμών στην τομή (S, V \ S) (τυχαία μεταβλητή).
  - Ακμή {u, v} «διασχίζει» τομή (S, V \ S) με πιθανότητα 1/2.
  - Αναμενόμενο βάρος ακμών στην τομή (S, V \ S):
    E[X] = W/2 (γραμμικότητα μέσης τιμής).
  - Λόγος προσέγγισης 1/2.
  - Μετατροπή σε ντετερμινιστικό με conditional probabilities.
    - Ποιος είναι ο αντίστοιχος ντετερμινιστικός αλγόριθμος;
- Γενίκευση για MAX-k-CUT, λόγος προσέγγισης 1 – 1/k.

Set Cover: Άπληστος Αλγόριθμος

- Σύνολο U ακάλυπτων στοιχείων (αρχικά U = S).
- Επιλογή υποσυνόλου που ελαχιστοποιεί **κόστος ανά ακάλυπτο στοιχείο** που καλύπτει: $w_i / |X_i \cap U|$
- Ενημέρωση U και συνέχεια ενόσω U δεν είναι κενό.

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{greedySetCover}(S, (X_1, w_1), \ldots, (X_m, w_m)) \\
\quad U \leftarrow S; \quad \mathcal{C} \leftarrow \emptyset; \\
\quad \text{while } U \neq \emptyset \text{ do} \\
\qquad j \leftarrow \arg\min_{i \in [m]} \{ w_i / |X_i \cap U| \}; \\
\qquad \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{j\}; \quad U \leftarrow U \setminus X_j; \\
\quad \mathrm{return}(\mathcal{C}, \sum_{i \in \mathcal{C}} w_i);
\end{array}
$$

Set Cover: Dual Fitting

- Set Cover LP και το δυϊκό του.

$$\begin{aligned} \min \ & \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j \\ \text{s.t. } & \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{s.t. } & \textstyle\sum_{i\in X_j} y_i \leq w_j \quad \forall X_j \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i \in [n] \end{aligned}$$

- «Οικονομική» ερμηνεία του δυϊκού:
  - Κάθε στοιχείο i «πληρώνει» y_i για να καλυφθεί.
  - Μεγιστοποίηση πληρωμών, υπό την προϋπόθεση ότι κανένα σύνολο δεν πληρώνεται περισσότερο από όσο κοστίζει.
  - Ισχυρή δυϊκότητα: κόστος λύσης = άθροισμα πληρωμών.
- Επιμερίζουμε κόστος άπληστου αλγόριθμου στα στοιχεία:
  - ∀ στοιχείο i, z_i = κόστος κάλυψης i από άπληστο αλγόριθμο.
  - Αν επιλογή X_j κάλυψε n_j στοιχεία, μεταξύ αυτών και το i, $z_i = w_j / n_j$
  - Κόστος άπληστου αλγόριθμου = άθροισμα των z_i

Set Cover: Dual Fitting

$$\begin{aligned} \max \ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{s.t.} \ & \textstyle\sum_{i \in X_j} y_i \le w_j && \forall X_j \\ & y_i \ge 0 && \forall i \in [n] \end{aligned}$$

- Επιμερίζουμε κόστος άπληστου αλγόριθμου στα στοιχεία:
  - $\forall$ στοιχείο i, z_i = κόστος κάλυψης i από άπληστο αλγόριθμο.
  - Αν επιλογή X_j κάλυψε n_j στοιχεία, μεταξύ αυτών και το i, $z_i = w_j / n_j$
  - Κόστος άπληστου αλγόριθμου = άθροισμα των z_i
- Θδο $y_i = z_i / H_n$ είναι εφικτή λύση για το δυϊκό.
  - Αφού OPT $\ge$ άθροισμα των y_i. Συνεπώς, λόγος προσέγγισης $\le H_n$
  - Έστω αυθαίρετο σύνολο X_j, $|X_j| = k_j$.
  - Αριθμούμε στοιχεία $X_j = \{1, 2, \ldots, k_j\}$ με τη σειρά που καλύπτονται.
  - $\lambda(i)$ = #ακάλυπτα στοιχεία του X_j όταν καλύπτεται το i $\ge k_j - i + 1$.
  - Άπληστο κριτήριο: $\forall i \in X_j$, $z_i \le w_j / \lambda(i) \le w_j / (k_j - i + 1)$
  - Συνεπώς:

$$\sum_{i \in X_j} H_n y_i = \sum_{i \in X_j} z_i \le w_j \left(\frac{1}{k_j} + \frac{1}{k_j - 1} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right)$$

$$= w_j H_{k_j} \le w_j H_n$$

Set Cover: Dual Rounding

- Set Cover LP και το δυϊκό του.

$$\begin{aligned} \min & \textstyle\sum_{j=1}^m x_j w_j & & \\ \text{s.t.} & \textstyle\sum_{j: i \in X_j} x_j \geq 1 & & \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 & & \forall j \in [m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max & \textstyle\sum_{i=1}^n y_i & & \\ \text{s.t.} & \textstyle\sum_{i \in X_j} y_i \leq w_j & & \forall X_j \\ & y_i \geq 0 & & \forall i \in [n] \end{aligned}$$

- Βέλτιστη λύση y στο δυϊκό με «κέρδος» OPT.
  - $\forall$ tight δυϊκό περιορισμό j, επιλέγουμε το σύνολο X_j στο cover.
- Εφικτή λύση:
  - $\exists$ στοιχείο i ακάλυπτο: **κανένας** περιορισμός με y_i δεν είναι tight!
  - Άτοπο: αυξάνουμε (λίγο) το y_i, χωρίς παραβίασης περιορισμών, και βελτιώνουμε «κέρδος» δυϊκής λύσης.
- Κάτω φράγμα για βέλτιστη λύση: OPT = άθροισμα των y_i

Set Cover: Dual Rounding

$$\begin{aligned} \max \ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{s.t.} \ & \textstyle\sum_{i \in X_j} y_i \leq w_j & \forall X_j \\ & y_i \geq 0 & \forall i \in [n] \end{aligned}$$

- Βέλτιστη λύση y στο δυϊκό με «κέρδος» OPT.
  - ∀ tight δυϊκό περιορισμό j, επιλέγουμε το σύνολο X_j στο cover.
- Κάτω φράγμα για βέλτιστη λύση: OPT = άθροισμα των y_i
- Άνω φράγμα στο κόστος της λύσης μας:

$$w(\mathcal{C}) = \sum_{X_j \in \mathcal{C}} w_j = \sum_{j:\text{constr. } j \text{ tight}} \sum_{i \in X_j} y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \left|\{j \in [m] : \text{constr. } j \text{ tight}\}\right|$$

$$\leq f \sum_{i=1}^{n} y_i$$

- Λόγος προσέγγισης ≤ f
- Άσκηση: νδο για κάθε στιγμιότυπο, κόστος dual rounding ≥ κόστος deterministic rounding.

Set Cover: Primal-Dual

- Set Cover LP και το δυϊκό του.

$$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j & \\ \text{s.t.} \textstyle\sum_{j:i\in X_j} x_j \geq 1 & \quad \forall i \in S \\ x_j \geq 0 & \quad \forall j \in [m] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i & \\ \text{s.t.} \textstyle\sum_{i\in X_j} y_i \leq w_j & \quad \forall X_j \\ y_i \geq 0 & \quad \forall i \in [n] \end{aligned}$$

- Αντί βέλτιστης dual λύσης, μια (κατάλληλη) εφικτή λύση που «πληρώνει» για το primal κόστος (βλ. complementary slackness).
- Συνθήκες πρωτεύοντος (α-χαλαρωμένες): $\forall j \in [m],\ x_j > 0 \Rightarrow w_j/\alpha \leq \sum_{i\in X_j} y_i \leq w_j$
  - Επιλογή μόνο **α-tight** συνόλων.
- Συνθήκες δυϊκού (β-χαλαρωμένες): $\forall i \in [n],\ y_i > 0 \Rightarrow 1 \leq \sum_{j:i\in X_j} x_j \leq \beta$
  - Κάθε στοιχείο που «πληρώνει», καλύπτεται το πολύ β φορές.
  - Κάθε τέτοιο ζεύγος (x, y) δίνει λόγο προσέγγισης ≤ αβ.

Set Cover: Primal-Dual

- Συνθήκες πρωτεύοντος: $\forall j \in [m],\ x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i \in X_j} y_i = w_j$
  - Επιλογή μόνο **tight** συνόλων.
- Συνθήκες δυϊκού (f-χαλαρωμένες): $\forall i \in [n],\ (y_i > 0 \Rightarrow)\ 1 \leq \sum_{j : i \in X_j} x_j \leq f$
  - Κάθε στοιχείο καλύπτεται το πολύ f φορές.
  - Κάθε τέτοιο ζεύγος (x, y) δίνει λόγο προσέγγισης ≤ f

PrimalDualSetCover$(S, (X_1, w_1), \ldots, (X_m, w_m))$

$U \leftarrow S;\quad \boldsymbol{y} \leftarrow \mathbf{0};\quad \mathcal{C} \leftarrow \emptyset;\quad \boldsymbol{x} \leftarrow \mathbf{0};$

while $U \neq \emptyset$ **do**

  take any $i \in U$ and increase y_i until

    for some j, $\sum_{\ell \in X_j} y_\ell = w_j$

  $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{j\};\quad x_j \leftarrow 1;\quad U \leftarrow U \setminus X_j;$

return$(\mathcal{C}, \sum_{i \in \mathcal{C}} w_i)$;

Set Cover: Primal-Dual

$$\begin{aligned} \max\ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{s.t.}\ & \textstyle\sum_{i\in X_j} y_i \le w_j \quad && \forall X_j \\ & y_i \ge 0 && \forall i \in [n] \end{aligned}$$

- Εφικτή λύση:
  - Συνθήκη τερματισμού: δεν υπάρχουν ακάλυπτα στοιχεία.
- Κάτω φράγμα για βέλτιστη λύση: άθροισμα των y_i
- Άνω φράγμα στο κόστος της λύσης μας:

$$w(\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{m} x_j w_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i\in X_j} y_i$$

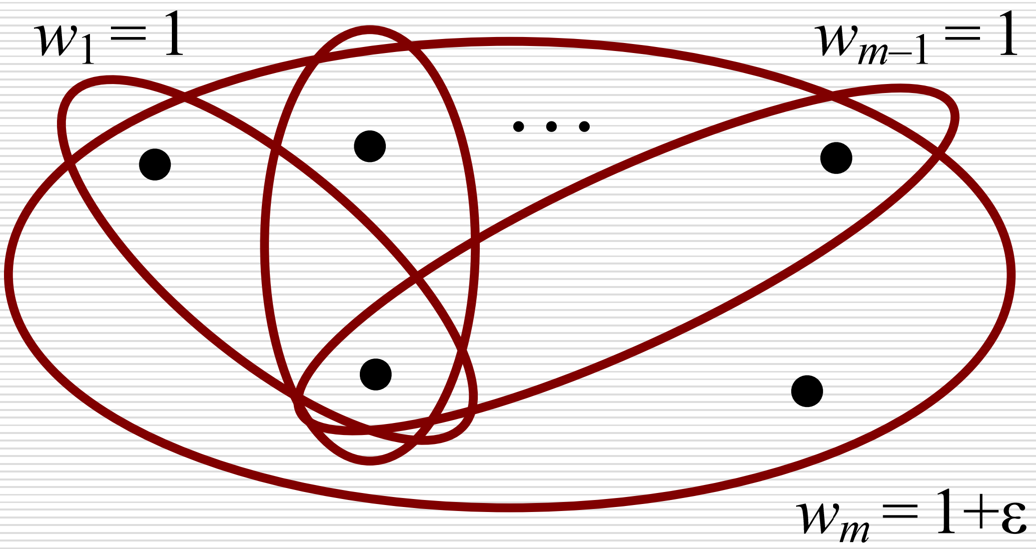
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j: i\in X_j} x_j$$

$$\le f \sum_{i=1}^{n} y_i$$

- Λόγος προσέγγισης $\le$ f

Set Cover: Primal-Dual

- Λόγος προσέγγισης = f



Χωροθέτηση Υπηρεσιών (Facility Location)

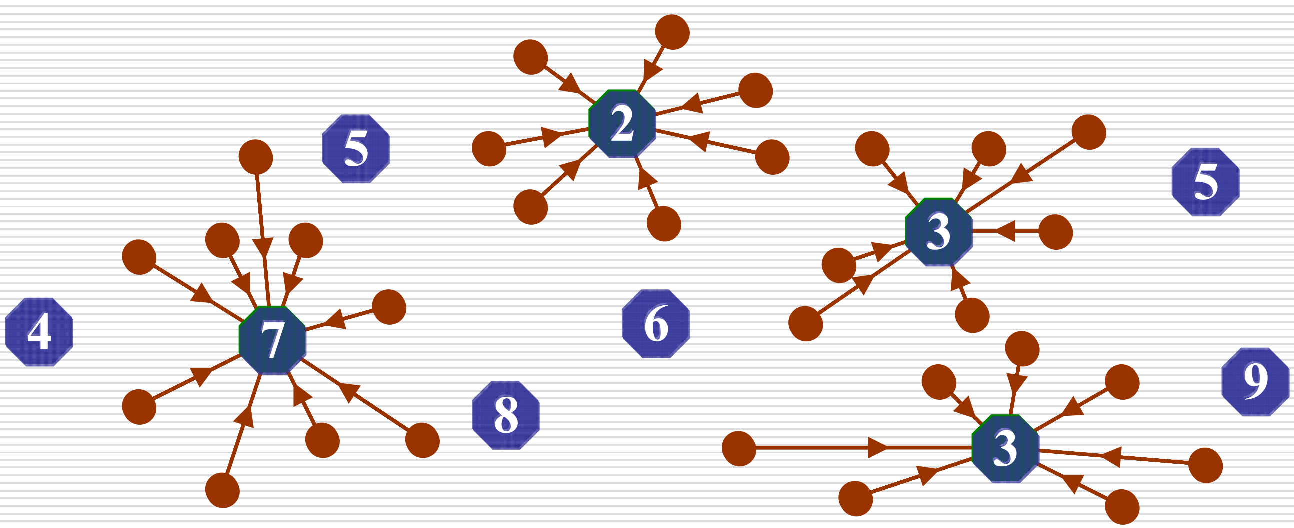
- Μετρικός χώρος (μη αρνητικές συμμετρικές **αποστάσεις** $d(i, j)$ που ικανοποιούν την **τριγωνική ανισότητα**).
- Θέσεις υπηρεσιών F με κόστος εγκατάστασης f_i, $\forall i \in F$.
- Θέσεις πελατών D, και αποστάσεις $d(j, i)$, $\forall j \in D$, $i \in F$.

Χωροθέτηση Υπηρεσιών (Facility Location)

- Θέσεις εγκατάστασης υπηρεσιών $F^* \subseteq F$ με ελάχιστο

  κόστος εγκατάστασης + κόστος εξυπηρέτησης

$$\min_{F^* \subseteq F} \left\{ \sum_{i \in F^*} f_z \quad + \quad \sum_{j \in D} d(F^*, j) \right\}$$



Εφαρμογές

- Έχει μελετηθεί εκτενώς (π.χ. [Mirchandani, Francis, 90]):
  - Χωροθέτηση υπηρεσιών κοινής ωφέλειας: σχολεία, νοσοκομεία, κλπ.
  - Εταιρικός σχεδιασμός: χωροθέτηση εργοστασίων, αποθηκών, καταστημάτων, κλπ.
- Πρόσφατο ενδιαφέρον (π.χ. [Shmoys, 00], [Guha, 00]):
  - Σχεδιασμός δικτύων: χωροθέτηση ενεργών συσκευών.
  - Ομαδοποίηση δεδομένων: *k*-ενδιάμεσων (*k*-median).
  - Μεγάλα και δυναμικά μεταβαλλόμενα στιγμιότυπα.

Προσεγγισιμότητα

- Λόγος προσέγγισης $\geq$ 1.463 (πολυων. χρ.) [Guha, Khuller, SODA 98].
- Πολυωνυμικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 1.52 [Mahdian, Ye, Zhang, APPROX 02].
- Πολυωνυμικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 1.5 [Byrka, APPROX 07].
- Πολυωνυμικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 1.488 [Li, ICALP 12].
- **Τεχνικές**: τοπική αναζήτηση, primal-dual, στρογγυλοποίηση λύσεων ΓΠ, και συνδυασμοί τους.

Linear Programming Relaxation

- Διατυπώνουμε αντίστοιχο IP και LP relaxation:

$$\min \sum_{i\in F} f_i y_i + \sum_{i\in F}\sum_{j\in D} x_{ij} d_{ij}$$

$$\begin{array}{llr} \text{s.t.} & \sum_{i\in F} x_{ij} \geq 1 & \forall j \in D \\ & x_{ij} \leq y_i & \forall i \in F, \forall j \in D \\ & y_i \in \{0,1\},\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i \in F, \forall j \in D \\ & y_i \geq 0,\ x_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

- Διατυπώνουμε δυϊκό του LP relaxation:

$$\max \sum_{j\in D} \alpha_j$$

$$\begin{array}{llr} \text{s.t.} & \alpha_j - \beta_{ij} \leq d_{ij} & \forall j \in D, \forall i \in F \\ & \sum_{j\in D} \beta_{ij} \leq f_i & \forall i \in F \\ & \alpha_j, \beta_{ij} \geq 0 & \forall j \in D, \forall i \in F \end{array}$$

Ερμηνεία Δυϊκού

$$\begin{array}{lll} & \max \sum_{j\in D} \alpha_j & \\ \text{s.t.} & \alpha_j - \beta_{ij} \le d_{ij} & \forall j \in D,\ \forall i \in F \\ & \sum_{j \in D} \beta_{ij} \le f_i & \forall i \in F \\ & \alpha_j, \beta_{ij} \ge 0 & \forall j \in D,\ \forall i \in F \end{array}$$

- α_j : τι πληρώνει η απαίτηση j για να «ικανοποιηθεί».
  - d_{ij} : κόστος σύνδεσης σε facility i.
  - β_{ij} : συνεισφορά στο κόστος του facility i.
  - Για κάθε facility i, συνολική συνεισφορά δεν ξεπερνά κόστος f_i.

$$\alpha_j = \min_{i \in F}\{d_{ij} + \beta_{ij}\}$$

- Primal complementary slackness συνθήκες:
  - Αν απαίτηση j συνδέεται σε facility i, τότε j συνεισφέρει στο κόστος f_i — $x_{ij} > 0 \Rightarrow \alpha_j = d_{ij} + \beta_{ij} \ge d_{ij}$
  - Αν facility i ανοίγει, τότε η συνολική συνεισφορά είναι ίση με κόστος f_i — $y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j\in D} \beta_{ij} = f_i$
- Dual complementary slackness συνθήκες:
  - Απαίτηση j δεν συνεισφέρει σε facility που δεν χρησιμοποιεί (πλήρως) — $\beta_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = y_i$
  - Όποιος πληρώνει εξυπηρετείται — $\alpha_j > 0 \Rightarrow \sum_{i\in F} x_{ij} = 1$

$$\begin{array}{lll} & \max \sum_{j\in D} \alpha_j & \\ \text{s.t.} & \alpha_j - \beta_{ij} \le d_{ij} & \forall j \in D,\ \forall i \in F \\ & \sum_{j\in D} \beta_{ij} \le f_i & \forall i \in F \\ & \alpha_j, \beta_{ij} \ge 0 & \forall j \in D,\ \forall i \in F \end{array}$$

Rounding

- Βέλτιστες λύσεις (x, y) και (α, β) για primal και dual.
  - Κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης: κόστος OPT της (x, y).
  - $\forall$ απαίτ. j, N(j) = { i $\in$ F: $x_{ij} > 0$ } (γειτονικά facilities του j).
- Ενόσω υπάρχουν απαιτήσεις που δεν εξυπηρετούνται:
  - Έστω j απαίτηση που δεν εξυπηρετείται με ελάχιστο α_j.
  - Άνοιξε φθηνότερη facility i $\in$ N(j), και εξυπηρέτησε από αυτή κάθε μη εξυπηρετούμενη απαίτηση k με N(k) $\cap$ N(j) $\neq \emptyset$.
- Αλγόριθμος παράγει εφικτή λύση.
- Συνολικό κόστος για άνοιγμα facilities $\le \sum_{q\in F} y_q f_q \le \mathrm{OPT}$
  - Απαίτ. j ανοίγει facility i με ελάχιστο κόστος στο N(j):

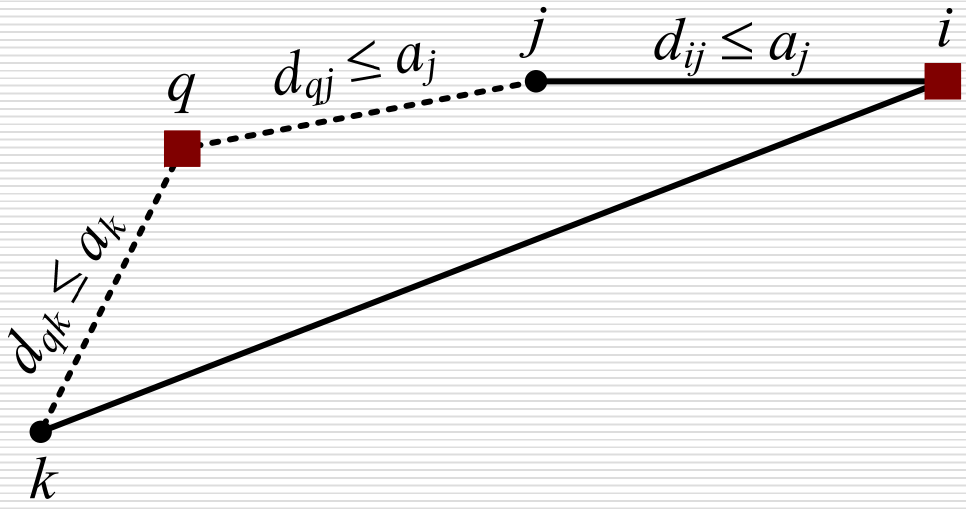
$$f_i \le f_i \sum_{q\in N(j)} x_{qj} \le f_i \sum_{q\in N(j)} y_q \le \sum_{q\in N(j)} y_q f_q$$

  - Αν απαιτ. j και j' ανοίγουν facilities i και i', N(j) $\cap$ N(j') = $\emptyset$.

Rounding

$$\max \sum_{j\in D} \alpha_j$$
$$\text{s.t.} \quad \alpha_j - \beta_{ij} \le d_{ij} \quad \forall j \in D, \forall i \in F$$
$$\sum_{j\in D} \beta_{ij} \le f_i \quad \forall i \in F$$
$$\alpha_j, \beta_{ij} \ge 0 \quad \forall j \in D, \forall i \in F$$

- Συνολικό κόστος εξυπηρέτησης $\le \sum_{k\in D} 3\alpha_k \le 3\,\mathrm{OPT}$
  - Απαίτηση j ανοίγει facility i. Κόστος σύνδεσης j $\le d_{ij} \le \alpha_j$
    - $d_{ij} \le \alpha_j$: $x_{ij} > 0$, και primal complementary slackness.
  - Μη εξυπηρετούμενη απαίτ. k με $N(k) \cap N(j) \neq \emptyset$, που συνδέεται στο i.
  - Facility $q \in N(k) \cap N(j)$. Κόστος σύνδεσης k: $\le d_{kq} + d_{qj} + d_{ji} \le \alpha_k + \alpha_j + \alpha_j \le 3\alpha_k$
    - Επιλογή ελάχιστου α_j.
- Λόγος προσέγγισης ≤ 4.



Randomized Rounding

- Μέσο κόστος σύνδεσης απαίτησης j: $D_j = \sum_{i \in F} x_{ij} d_{ij}$
- Ενόσω υπάρχουν απαιτήσεις που δεν εξυπηρετούνται:
  - Έστω j απαίτηση που δεν εξυπηρετείται με ελάχιστο $a_j + D_j$.
  - Άνοιξε facility $i \in N(j)$ με πιθανότητα x_{ij}, και εξυπηρέτησε από αυτή κάθε μη εξυπηρετούμενη απαίτηση k με $N(k) \cap N(j) \neq \emptyset$.
- Αναμενόμενο κόστος για άνοιγμα facilities $\leq \sum_{q \in F} y_q f_q = F_{\mathrm{OPT}}$
- Αναμεν. κόστος εξυπηρέτησης $\leq \sum_{j \in D} 2\alpha_j + D_j \leq 2\,\mathrm{OPT} + D_{\mathrm{OPT}}$
  - Απαίτηση j ανοίγει facility. Αναμενόμενο κόστος σύνδεσης j = D_j
  - Μη εξυπηρετούμενη απαίτ. k με $N(k) \cap N(j) \neq \emptyset$:
  - Facility $q \in N(k) \cap N(j)$. Αναμενόμενο κόστος σύνδεσης k:

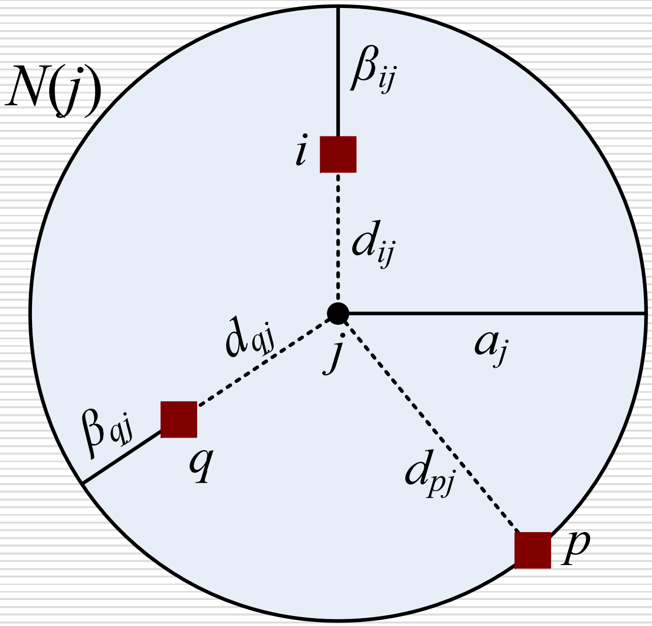
$$\leq d_{kq} + d_{qj} + D_j \leq \alpha_k + \alpha_j + D_j \leq 2\alpha_k + D_k$$

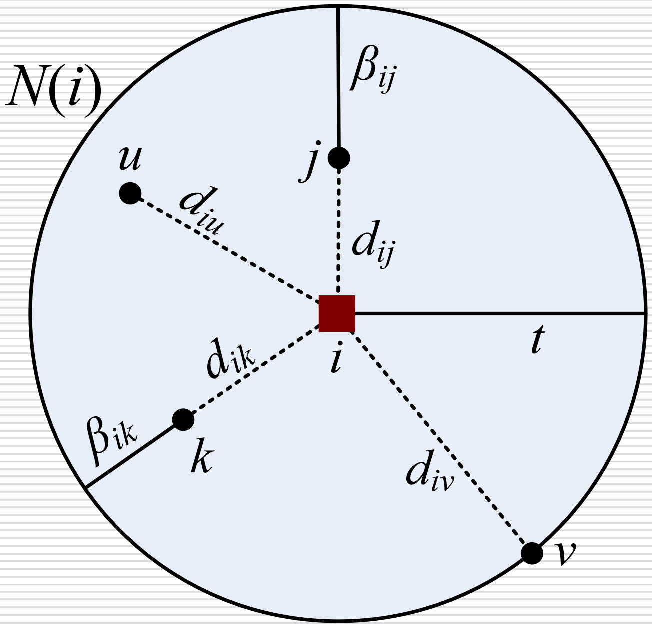
- Λόγος προσέγγισης ≤ 3.
- Γιατί δεν ανοίγουμε κάθε facility ανεξάρτητα με πιθανότητα y_i;

Primal-Dual

$$\begin{array}{llr} & \max \sum_{j \in D} \alpha_j & \\ \text{s.t.} & \alpha_j - \beta_{ij} \le d_{ij} & \forall j \in D,\ \forall i \in F \\ & \sum_{j \in D} \beta_{ij} \le f_i & \forall i \in F \\ & \alpha_j, \beta_{ij} \ge 0 & \forall j \in D,\ \forall i \in F \end{array}$$

- Έστω μια εφικτή λύση (α, β) για dual.
  - Κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης: άθροισμα των α_j.
  - $\forall$ απαίτ. j, $N(j) = \{ i \in F: \alpha_j \ge d_{ij} \}$ (γειτονικά facilities του j).
  - $\forall$ fac. i, $N(i) = \{ j \in D: \alpha_j \ge d_{ij} \}$ (γειτονικές απαιτήσεις του i).





S: μη εξυπηρετούμενες απαιτήσεις
T: προσωρινά ανοικτές facilities

Primal-Dual

$$\max \sum_{j \in D} \alpha_j$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha_j - \beta_{ij} \le d_{ij} \quad \forall j \in D, \forall i \in F$$

$$\sum_{j \in D} \beta_{ij} \le f_i \quad \forall i \in F$$

$$\alpha_j, \beta_{ij} \ge 0 \quad \forall j \in D, \forall i \in F$$

PrimalDualFacilityLocation(F, D, d)

$\alpha \leftarrow 0$; $\beta \leftarrow 0$; $S \leftarrow D$; $T \leftarrow \emptyset$;

while $S \neq \emptyset$ **do**

αύξησε α_j, $\forall j \in S$, και β_{ij}, $\forall i \in N(j)$, $j \in S$, ομοιόμορφα μέχρι

είτε κάποια απαίτ. $j \in S$ να γίνει γείτονας κάποιου προσωρινά ανοικτού fac. $i \in T$

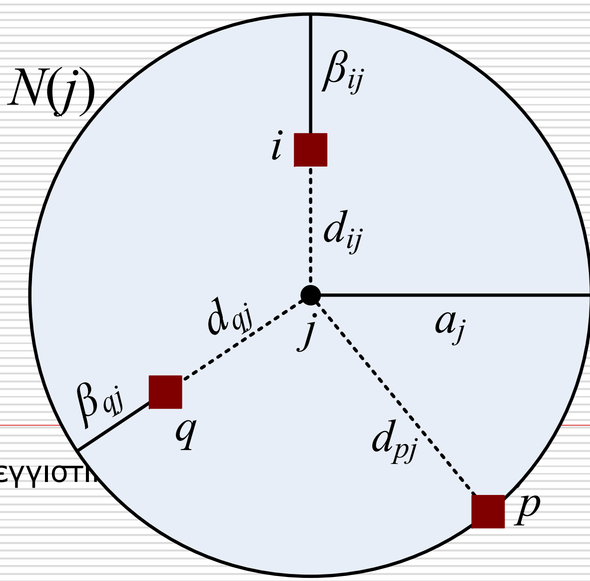
είτε περιορισμός κάποιας facility $i \notin T$ να γίνει tight.

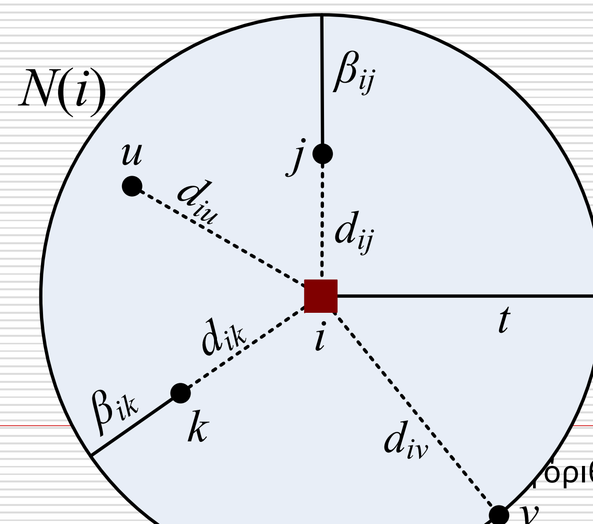
if απαίτηση $j \in S$ έγινε γείτονας κάποιας $i \in T$ **then**

$S \leftarrow S \setminus \{j\}$;

if περιορισμός facility $i \notin T$ έγινε tight **then**

$T \leftarrow T \cup \{i\}$; $S \leftarrow S \setminus N(i)$;





Primal-Dual

S: μη εξυπηρετούμενες απαιτήσεις
T: προσωρινά ανοικτές facilities
O: facilities που ανοίγει ο αλγόριθμος
C(i): σύνολο απαιτήσεων που συνεισφέρουν σε κόστος fac i

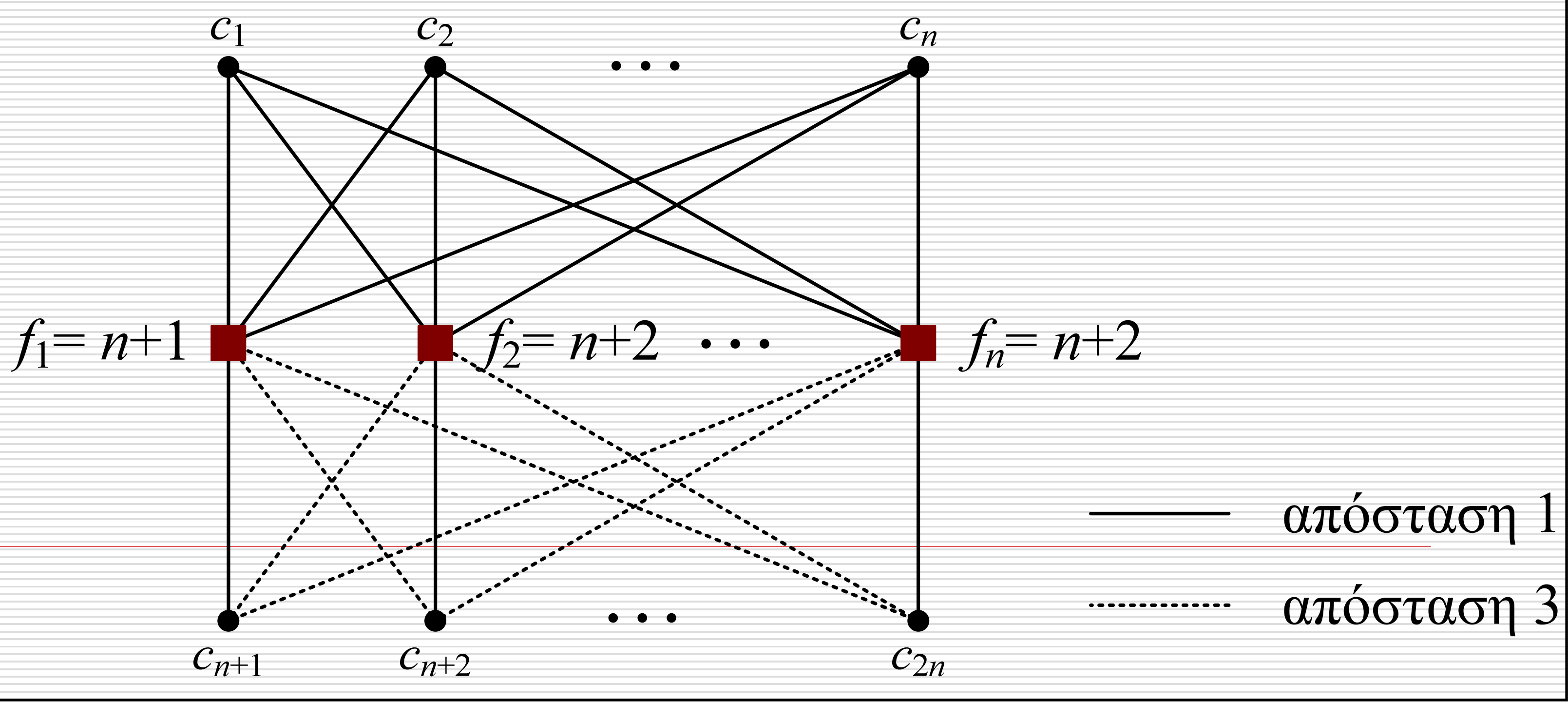
PrimalDualFacilityLocation(F, D, d)
 $\boldsymbol{\alpha} \leftarrow \mathbf{0}$; $\boldsymbol{\beta} \leftarrow \mathbf{0}$; $S \leftarrow D$; $T \leftarrow \emptyset$;
 while $S \neq \emptyset$ **do**
  αύξησε α_j, $\forall j \in S$, και β_{ij}, $\forall i \in N(j)$, $j \in S$, ομοιόμορφα μέχρι
   είτε κάποια απαίτ. $j \in S$ να γίνει γείτονας κάποιου προσωρινά ανοικτού fac. $i \in T$
   είτε περιορισμός κάποιας facility $i \notin T$ να γίνει tight.
  if απαίτηση $j \in S$ έγινε γείτονας κάποιας $i \in T$ **then**
   $S \leftarrow S \setminus \{j\}$;
  if περιορισμός facility $i \notin T$ έγινε tight **then**
   $T \leftarrow T \cup \{i\}$; $S \leftarrow S \setminus N(i)$;
 $O \leftarrow \emptyset$;
 while $T \neq \emptyset$ **do**
  διάλεξε κάποιο $i \in T$; $O \leftarrow O \cup \{i\}$;
  $T \leftarrow T \setminus \{q \in T : \exists j \in D, \beta_{ij} > 0 \text{ και } \beta_{qj} > 0\}$;
  $C(i) \leftarrow \{j \in D : \beta_{ij} > 0\}$;
 $Z \leftarrow D \setminus \cup_{i \in O} C(i)$;
 return$(O, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$;

Τα σύνολα C(i), i $\in$ O, είναι ξένα μεταξύ τους!

Χρόνος εκτέλεσης O(mlogm).

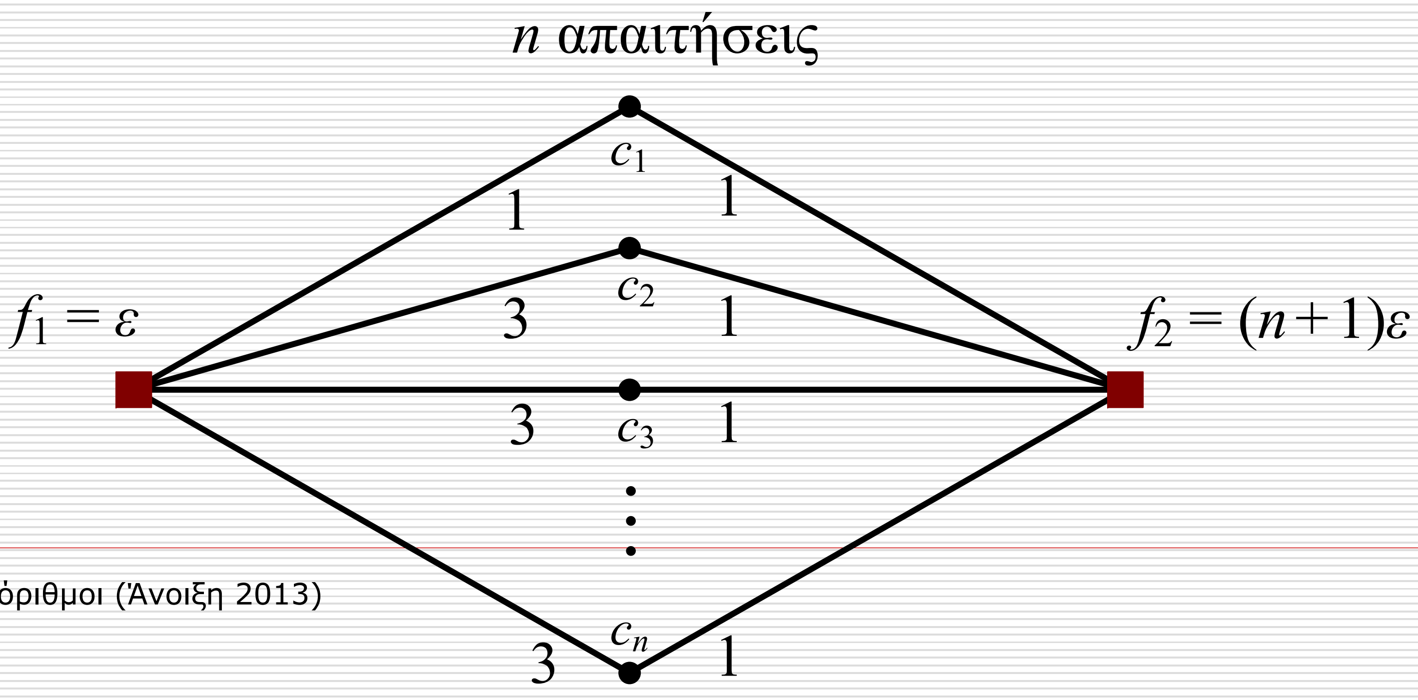
Primal-Dual: «Μείωση» T σε O

- Στο τέλος του αλγόριθμου:
  - $\forall j = 1, \ldots, n+1$, $\alpha_j = 2$, facility 1 στο T.
  - $\forall j = n+2, \ldots, 2n$, $\alpha_j = 3$, facilities 2, …, n στο T.
  - Κόστος για facilities στο T = n(n+1)+n−1. Αλλά OPT = 5n−1.
  - Τελικά μόνο μία facility στο O.
  - Συνολικό κόστος αλγόριθμου ≤ 5n.



Primal-Dual: Παράδειγμα

- Στο τέλος του αλγόριθμου:
  - $\alpha_1 = 1+\varepsilon$, $\beta_{11} = \beta_{12} = \varepsilon$.
  - $\forall j \geq 2$, $\alpha_j = 1+n\varepsilon/(n-1)$, $\beta_{j1} = \beta_{j2} = n\varepsilon/(n-1)$.
  - OPT = άθροισμα των α_j = $n + (n+1)\varepsilon$.
- Αλγόριθμος μπορεί να ανοίξει facility 1, με κόστος $3n-2+\varepsilon$.
  - Λόγος προσέγγισης $> 3 - \delta$, $\forall \delta > 0$.



Primal-Dual: Ανάλυση

- Συνολικό κόστος για facilities i ∈ O και σύνδεση των απαιτήσεων σε κάθε C(i) στο αντίστοιχο facility i:

$$\sum_{i\in O}\left(f_i + \sum_{j\in C(i)} d_{ij}\right) = \sum_{i\in O}\sum_{j\in C(i)} (\beta_{ij} + d_{ij}) = \sum_{i\in O}\sum_{j\in C(i)} \alpha_j$$

  - $\forall i \in O,\ \sum_{j\in D} \beta_{ij} = \sum_{j\in C(i)} \beta_{ij} = f_i$
  - Τα σύνολα C(i), i ∈ O, είναι ξένα μεταξύ τους.

- Θα δείξουμε ακόμη ότι: $\sum_{j\in Z} d(O,j) \le 3\sum_{j\in Z} \alpha_j$

- Άρα: $3\sum_{i\in O} f_i + \sum_{j\in D} d(O,j) \le 3\sum_{j\in D}\alpha_j \le 3\,\mathrm{OPT}$
  - Λόγος προσέγγισης = **3**. Facility κόστος «πληρώνεται» 1-1 με OPT!

Primal-Dual: Ανάλυση

- $\forall$απαίτηση $k \in Z$, υπάρχει facility $i \in O$: $d(O, k) = d_{ik} \le 3a_k$
  - Αύξηση a_k σταματά όταν k γείτονας προσωρινά ανοικτού fac. $q \in T$.
    - Συνεπώς: $d_{kq} \le a_k$
  - Αφού $k \in Z$, υπάρχει facility $i \in O$ και απαίτηση j: $\beta_{ij} > 0$ και $\beta_{qj} > 0$.
    - Συνεπώς: $d_{ij} \le a_j$ και $d_{qj} \le a_j$
  - Κόστος σύνδεσης k: $d_{ik} \le d_{kq} + d_{qj} + d_{ji} \le \alpha_k + \alpha_j + \alpha_j \le 3\alpha_k$
  - Μένει να δείξουμε ότι $a_j \le a_k$:
    - t_q = χρονική στιγμή που q προστέθηκε στο T.
    - Αύξηση a_k σταματά όχι αργότερα από t_q : $t_q \le a_k$
    - Επειδή $\beta_{qj} > 0$, $t_q = a_j$