Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι και Σχεδιασμός Μηχανισμών
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
2η Γραπτή Εργασία – Ημ/νία Παράδοσης 4/7/2013

Άσκηση 1: Maximal-in-Range Μηχανισμοί και Αγορά Δέντρου Steiner

Ένας (προσεγγιστικός) αλγόριθμος A για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης καλείται *maximal-in-range* (MiR) αν υπολογίζει μια βέλτιστη λύση σε ένα υποσύνολο R του συνόλου των πιθανών λύσεων O. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κοινωνικού κόστους, λέμε ότι ο A είναι MiR αν υπάρχει $R \subseteq O$ τέτοιο ώστε για κάθε είσοδο $\boldsymbol{v}$, $A(\boldsymbol{v}) = \arg\min_{a \in R} \sum_i v_i(a)$. Η ιδέα είναι ότι το R μπορεί να είναι σημαντικά μικρότερο από το O, και έτσι η βελτιστοποίηση στο R μπορεί να είναι υπολογιστικά ευκολότερη από τη βελτιστοποίηση στο O.

(α) Δεδομένου ενός MiR αλγόριθμου A πολυωνυμικού χρόνου, να βρείτε ένα σχήμα πληρωμών που υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο και κάνει τον A φιλαλήθη.

Θα εφαρμόσουμε τώρα την ιδέα των MiR μηχανισμών στο πρόβλημα της Αγοράς ενός Δέντρου Steiner. Στο πρόβλημα του Δέντρου Steiner, θεωρούμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$, με θετικά κόστη $w : E \mapsto \mathbb{R}_+$ στις ακμές, και ένα υποσύνολο κορυφών $R \subseteq V$ τις οποίες θέλουμε να συνδέσουμε με ένα δέντρο ελάχιστου συνολικού κόστους. Για να επιτύχουμε μικρότερο κόστος, μπορεί το δέντρο μας να περιέχει και κορυφές εκτός R. Στην παιγνιοθεωρητική εκδοχή του προβλήματος, που μελετούμε εδώ, θεωρούμε επιπλέον ότι κάθε ακμή e ανήκει σε έναν διαφορετικό παίκτη, και ότι το αντίστοιχο κόστος w_e είναι μυστικό και το γνωρίζει μόνο ο κάτοχος της ακμής. Χρειάζεται ακόμη να υποθέσουμε ότι καμία ακμή του γραφήματος G δεν είναι γέφυρα. Αν σας διευκολύνει, μπορείτε να υποθέσετε ότι το γράφημα G είναι πλήρες και ότι τα μήκη των ακμών ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλ. για κάθε $x, y, z \in V$, $w(x, z) \leq w(x, y) + w(y, z)$.

(β) Να διατυπώσετε έναν 2-προσεγγιστικό MiR μηχανισμό πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα της Αγοράς ενός Δέντρου Steiner.

Άσκηση 2: Bayesian Optimal Mechanism Design

(α) Έστω τρεις παίκτες των οποίων το valuation για ένα αντικείμενο προκύπτει από τις εξής ομοιόμορφες κατανομές: $x_1 \in [0, 3]$, $x_2 \in [2, 6]$, και $x_3 \in [8, 11]$. Να διατυπωθεί ο μηχανισμός που μεγιστοποιεί το κέρδος του εκπλειστηριαστή, αν αυτός θέλει να πουλήσει το αντικείμενο ανάμεσα (i) στους παίκτες 1 και 2, και (ii) στους παίκτες 1 και 3. Να βρείτε για ποιους συνδυασμούς bids των δύο παικτών κερδίζει ο παίκτης 1. Να υπολογίσετε ακόμη την τιμή στην οποία ο νικητής αγοράζει το αντικείμενο σε κάθε περίπτωση, ως συνάτηρηση των bids όλων των παικτών.

(β) Ερώτημα 3, σελ. 12, σημειώσεις J. Hartline σε optimal mechanism design (μπορείτε να βρείτε link σε αυτές στο site του μαθήματος).

Άσκηση 3: Procurement Auction with Single-Minded Bidders

Άσκηση 11.9, σελ. 299, Κεφάλαιο 11, στο βιβλίο *Algorithmic Game Theory*, των N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, και V.V. Vazirani.

Άσκηση 4: Local-to-Global Truthfulness

Στο principal-agent μοντέλο θεωρούμε ότι υπάρχει ένα σύνολο O από αποτελέσματα, και ότι ο (μοναδικός) agent έχει μία κρυφή τιμή για κάθε ένα από αυτά. Δηλαδή θεωρούμε ότι ο agent έχει μια ιδιωτική πληροφορία $x \in \mathbb{R}^O$ [1], δηλαδή η ιδιωτική πληροφορία του agent είναι μια συνάρτηση $x : O \mapsto \mathbb{R}$. Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ιδιωτική πληροφορία του agent ανήκει στο το πεδίο ορισμού (domain) $D \subseteq \mathbb{R}^O$ του μηχανισμού. Ο principal θέλει να υλοποιήσει μια συνάρτηση $f : D \mapsto O$, και γι' αυτό ρωτάει τον agent για την ιδιωτική του πληροφορία. Αν ο agent απαντήσει y, ο principal επιλέγει το αποτέλεσμα $f(y)$. Ο agent δηλώνει εκείνη τη συνάρτηση y που μεγιστοποιεί το προσωπικό του όφελος, δηλαδή την ποσότητα $x(f(y))$. Αν για κάθε $x \in D$, ο agent προτιμά να δηλώσει $y = x$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f, που θέλει να υλοποιήσει ο principal, είναι *φιλαλήθης* (truthful ή strategyproof). Αν ο principal έχει στην διάθεση του και χρήματα, τότε μπορεί να επιλέξει και μία συνάρτηση χρηματικού ανταλλάγματος $p : D \mapsto \mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο agent επιλέγει να δηλώσει εκείνο το y που μεγιστοποιεί την ποσότητα $x(f(y)) + p(y)$. Αν υπάρχει συνάρτηση p τέτοια ώστε ο agent να προτιμά να δηλώσει $y = x$, τότε η f λέγεται *φιλαλήθης με χρήματα*.

Λέμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την *weak monotonicity* ιδιότητα αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε $z, w \in D$, $z(f(z)) - z(f(w)) + w(f(w)) - w(f(z)) \geq 0$.

(α) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f δεν ικανοποιεί την weak monotonicity, τότε δεν είναι φιλαλήθης με χρήματα.

Θεωρούμε, στον χώρο $\mathbb{R}^O$, μια νόρμα $||\cdot||$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Με βάση αυτή, ορίζουμε την ϵ-γειτονιά ενός σημείου $x \in D$ ως $N_\epsilon(x) = \{y \in D : ||x - y|| \leq \epsilon\}$, για $\epsilon > 0$. Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *τοπικά φιλαλήθης* (locally truthful) αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ και συνάρτηση $p : D \mapsto \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in D$, η ποσότητα $x(f(y)) + p(y)$, με $y \in N_\epsilon(x)$, να μεγιστοποιείται στο $y = x$. Δηλαδή αν ο agent δεν έχει συμφέρον να πει κάποιο "μικρό" ψέμα, δηλ. κάποιο ψέμα κοντά στην πραγματική του κατάσταση, τότε δεν έχει συμφέρον να πει κανενός είδους ψέμα.

(β) Να ορίσετε την *τοπική weak monotonicity ιδιότητα*, και αποδείξτε ότι αν η f δεν την ικανοποιεί τότε δεν είναι τοπικά φιλαλήθης.

Στον χώρο $\mathbb{R}^O$, λέμε ότι ένα σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^O$ είναι *κυρτό* (convex) αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ \forall \lambda \in [0,1],\ x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in D$$

Στο εξής, θα θεωρούμε ότι το σύνολο D είναι κυρτό.

(γ) Να δείξτε ότι αν υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι τοπικά weak monotone, τότε το ίδιο ισχύει και για $\epsilon' = 2\epsilon$. *Υπόδειξη:* Για να δείξετε ότι ισχύει η weak monotonicity για δύο σημεία x_0, x_1 που απέχουν το πολύ 2ϵ, χρησιμοποιήστε το σημείο $x_{1/2}$ και το γεγονός ότι ισχύει η weak monotonicity για σημεία που απέχουν απόσταση το πολύ ϵ.

(δ) Να δείξετε ότι αν το domain D του μηχανισμού είναι κυρτό, τότε μια συνάρτηση $f : D \mapsto O$ είναι τοπικά weak monotone αν και μόνο αν είναι weak monotone. Επιπλέον, να δείξετε ότι αν το σύνολο O των αποτελεσμάτων είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε μια συνάρτηση f είναι τοπικά φιλαλήθης αν και μόνο αν είναι φιλαλήθης. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Saks-Yu.

[1] Το $\mathbb{R}^O$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το O στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5: Ας Μοιράσουμε Δουλειά

Έχουμε μια μονάδα εργασίας την οποία μοιράζουμε σε n strategic agents. Θεωρούμε ότι κάθε agent i έχει single-peaked προτιμήσεις για τον όγκο της δουλειάς που θα αναλάβει, με ιδεώδες σημείο $v_i \in [0,1]$, δηλ. για κάθε $a, b \in [0,1]$, αν $a < b \leq v_i$ (ή αντίστοιχα, $v_i \geq b > a$), ο agent i προτιμά να αναλάβει b μονάδες εργασίας αντί για a. Να διατυπώσετε έναν μηχανισμό F, που με είσοδο τα ιδεώδη σημεία $(v_1, \dots, v_n)$ των agents, παράγει μια ανάθεση $(x_1, \dots, x_n)$ για το σύνολο της εργασίας, δηλ. πρέπει $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Ο μηχανισμός σας πρέπει να είναι φιλαλήθης (strategyproof) και ανώνυμος, δηλ. να μην λαμβάνει υπόψη την ταυτότητα των παικτών.