Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Υπολογισιμότητα και Πολυπλοκότητα (ΣΗΜΜΥ), Υπολογισιμότητα και Πολυπλοκότητα (Μοντέλα Υπολογισμών) (ΣΕΜΦΕ), Μοντέλα Υπολογισμού, Τυπικές γλώσσες και αυτόματα (ΑΛΜΑ) , ακαδ. έτος 2019-20

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Π. Ποτίκας
Εαρινό Εξάμηνο 2019-2020

15η σειρά γραπτών ασκήσεων - Πολυπλοκότητα

Άσκηση 1.

α'. Περιγράψτε αναγωγή του προβλήματος εύρεσης κύκλου Hamilton (S_{HC}) στο πρόβλημα (απόφασης) ύπαρξης κύκλου Hamilton (D_{HC}). Δηλαδή, υποθέτοντας ότι σας δίνουν έτοιμο (blackbox) έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το D_{HC}, δώστε έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το S_{HC}.

β'. Δώστε ένα ισοδύναμο πρόβλημα απόφασης για το πρόβλημα FACTORING (δηλαδή ένα πρόβλημα απόφασης στο οποίο μπορεί να αναχθεί το FACTORING). Εξηγήστε γιατί τα δύο προβλήματα είναι πολυωνυμικά ισοδύναμα.

Άσκηση 2.

1. Δείξτε ότι **NP** ≠ **DSPACE**$[n]$
   Υπόδειξη: Δεν γνωρίζουμε αν κάποια από τις δύο κλάσεις περιέχει την άλλη. Προσπαθήστε να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα κλειστότητας που έχει μόνο μία από τις δύο κλάσεις.

2. Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς τις logspace και Karp αναγωγές. Ισχύει το ίδιο για την κλάση **DTIME**$[n^2]$;

Άσκηση 3.

Δείξτε ότι αν η γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ είναι πεπερασμένη, τότε $L \in$ **DTIME**$[n]$.

Άσκηση 4.

1. Έστω $L_1, L_2 \in$ **NP**. Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλ. ότι και $L_1 \cup L_2 \in$ **NP**. Ισχύει το ίδιο και για την $L_1 \cap L_2$;

2. Ορίζουμε ως το άστρο του Kleene μιας γλώσσας L την γλώσσα:

   $$L^* = \{x_1 x_2 ... x_k \mid k \geq 0 \;\&\; x_1, x_2, ..., x_k \in L\}$$

   Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene.

Άσκηση 5.

α' Δείξτε ότι ο ορισμός με πιστοποιητικά της κλάσης **NL** (Ορισμός 4.19 από το βιβλίο των Arora-Barak) είναι ισοδύναμος με τον αρχικό ορισμό της **NL** (**NL** $=$ **NSPACE**$[\log n]$).

β' Δείξτε ότι αν στον ορισμό με πιστοποιητικά της **NL** επιτρέψουμε στην read-once κεφαλή να κινείται και στις δύο κατευθύνσεις, τότε η κλάση που ορίζεται είναι ακριβώς η **NP**.

Άσκηση 6.

Έστω γλώσσα L και κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$. Η L ονομάζεται "low" για την $\mathcal{C}$ αν $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι η γλώσσα L δεν προσφέρει επιπλέον υπολογιστική δύναμη στην $\mathcal{C}$ αν την χρησιμοποιήσουμε ως μαντείο (oracle). Επιπλέον, για δύο κλάσεις πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ λέμε ότι η $\mathcal{C}'$ είναι low για την $\mathcal{C}$ αν για κάθε $L \in \mathcal{C}'$: $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Δείξτε ότι:

1. $\mathbf{P}^{\mathbf{BPP}} = \mathbf{BPP}$.
2. $\mathbf{BPP}^{\mathbf{BPP}} = \mathbf{BPP}$.
3. Η **BPP** είναι low για την **PP**.

Άσκηση 7.

Θα μελετήσουμε τον τελεστή "$\mathcal{BP}\cdot$ ", που δρα πάνω σε κλάσεις πολυπλοκότητας, και τις ιδιότητές του:

Έστω **C** μια κλάση πολυπλοκότητας και $L \subseteq$. $L \in \mathcal{BP}\cdot\mathbf{C}$ αν υπάρχει μία γλώσσα $A \in \mathbf{C}$, ένα πολυώνυμο p, και μία σταθερά $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$:

$$\mathbf{Pr}_{y \in \{0,1\}^{p(|x|)}}\left[(x;y) \in A \leftrightarrow x \in L\right] \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

1. Δείξτε ότι $\mathcal{BP}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{BPP}$.
2. Δείξτε ότι αν $\mathbf{C}_1 \subseteq \mathbf{C}_2$, τότε και $\mathcal{BP}\cdot\mathbf{C}_1 \subseteq \mathcal{BP}\cdot\mathbf{C}_2$.
3. Δείξτε ότι $co(\mathcal{BP}\cdot\mathbf{C}) \subseteq \mathcal{BP}\cdot(co\mathbf{C})$. Τι συνεπάγεται αυτή η σχέση αν η **C** είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα?
4. Δείξτε ότι αν η **C** είναι κλειστή ως προς padding[1]εC$\subseteq \mathcal{BP}\cdot\mathbf{C}$.

όπου $\mathbf{C}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ κλάσεις πολυπλοκότητας.

Άσκηση 8.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $PARITY(x_1, x_2, ..., x_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i \; mod \; 2) \in \mathbf{NC}^1$

Άσκηση 9.

1. Δείξτε ότι $\mathbf{PCP}[0, \log n] = \mathbf{P}$.
2. Δείξτε ότι $\mathbf{PCP}[\log n, 1] \subseteq \mathbf{NP}$.

Άσκηση 10.

1. Ένα μη-ντετερμινιστικό κύκλωμα C έχει δύο εισόδους $x = x_1x_2\cdots x$ και $y = y_1y_2\cdots y_m$. Το κύκλωμα C αποδέχεται το x αν και μόνο αν $\exists y \; C(x,y) = 1$. Δείξτε ότι κάθε γλώσσα στην κλάση **MA** έχει μη-ντετερμινιστικά κυκλώματα πολυωνυμικού μεγέθους.

2. Δείξτε ότι $\mathcal{BP}\cdot co\mathbf{NP} = co\mathbf{AM}$.