Πολυπλοκότητα Αναζήτησης

Παναγιώτης Πατσιλινάκος

ΣΗΜΜΥ

27 Μαΐου 2018

1. Εισαγωγή
   - Προβλήματα αναζήτησης
   - Τοπική αναζήτηση
2. Παραδείγματα
   - Περιοδεύων πωλητής
   - Παίγνια δυναμικού
3. Η κλάση *PLS*
   - *PO* και *NPO*
   - *PLS*
   - *PLS*-πληρότητα
4. Αναζήτηση λύσης
   - Εισαγωγή
   - *TFNP*
   - *PPAD*
   - Προβλήματα στην *PPAD*

Προβλήματα αναζήτησης

- Μέχρι στιγμής, έχουμε ασχοληθεί με προβλήματα απόφασης, όπως η κλάση γλωσσών NP και κλάσεις συναρτήσεων, όπως η FP.
- Θα μιλήσουμε για κλάσεις προβλημάτων αναζήτησης, όπου μας ενδιαφέρει όχι μόνο να αποφασίσουμε αν υπάρχει κάποια λύση, αλλά θέλουμε και να την βρούμε.

Κλάσεις συναρτήσεων (I)

Ορίζουμε το συναρτησιακό ανάλογο της κλάσης NP:

Ορισμός (FNP)

Ως **FNP** ορίζουμε την κλάση των μερικών πλειότιμων (partially multivalued) συναρτήσεων που υπολογίζονται από μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing πολυωνυμικού χρόνου, τέτοια ώστε το δένδρο υπολογισμού της, για είσοδο x να έχει στα φύλλα είτε ? είτε το πιστοποιητικό y του μονοπατιού που ικανοποιεί το αντίστοιχο κατηγόρημα $R(x, y)$.

Κλάσεις συναρτήσεων (II)

Ο μη-ντετερμινισμός όμως, δημιουργεί πρόβλημα στον ορισμό κλάσεων συναρτήσεων, καθώς για δεδομένη είσοδο $x \in \Sigma^*$ δεν υπάρχει μοναδική συμβολοσειρά εξόδου. Αυτό οδήγησε στον ορισμό των ακόλουθων κλάσεων:

Ορισμός (**NPMV**)

Η κλάση των μερικών πλειότιμων συναρτήσεων που υπολογίζονται από μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing πολυωνυμικού χρόνου, τέτοια ώστε το δένδρο υπολογισμού να έχει στα φύλλα είτε ? είτε κάποια από τις δυνατές απαντήσεις της μηχανής Turing.

Ορισμός (**NPSV**)

Η κλάση που περιλαμβάνει τις **μονότιμες NPMV** συναρτήσεις.

Προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

- Προβλήματα με πεπερασμένο η αριθμήσιμα άπειρο σύνολο «λύσεων» για τα οποία ψάχνουμε τη λύση που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους.

Ορισμός

- **Στιγμιότυπο** ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης ονομάζεται ένα ζεύγος (S, f), όπου S ένα αριθμήσιμο **σύνολο λύσεων** και $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κόστους.
- Ένα **πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης** Π, ορίζεται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων και από το αν αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης η ελαχιστοποίησης.
- Δεδομένου ενός στιγμιοτύπου (S, f) ενός προβλήματος Π το ζητούμενο είναι μια λύση $s^* \in S$ που να αποτελεί καθολικό βέλτιστο. Δηλαδή, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πρέπει $f(s^*) \leq f(s)$ για κάθε $s \in S$. Αντίστροφα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Τοπική αναζήτηση

- Μελετάμε αλγορίθμους «**τοπικής αναζήτησης**» για να λύσουμε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.
- Κάθε αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια **συνάρτηση γειτνίασης** που για κάθε λύση ορίζει τις γειτονικές της.

Ορισμός

- **Συνάρτηση γειτνίασης** N ενός στιγμιότυπου (S, f), είναι μια συνάρτηση $N : S \to 2^S$. Για κάθε λύση $s \in S$ η N ορίζει ένα σύνολο $N(s) \subseteq S$ που ονομάζεται **γειτονιά** του s.
- Έτσι, μια λύση s' είναι **γειτονική** της λύσης s ανν $s' \in S$.
- Ο πληθάριθμος του $N(s)$ ονομάζεται **μέγεθος της γειτονιάς** του s.
- Μια συνάρτηση γειτνίασης ονομάζεται **συμμετρική** όταν $s' \in N(s)$ ανν $s \in N(s')$

Γράφος γειτνίασης

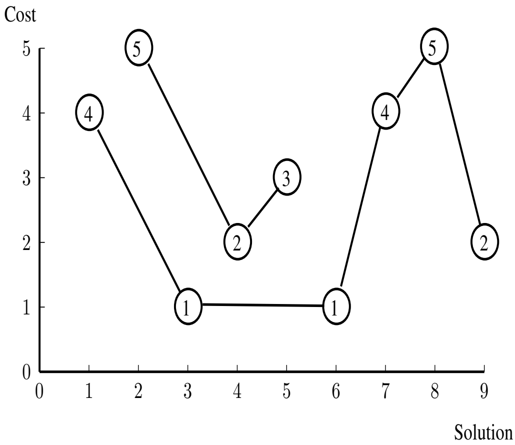
Ορισμός

Ο **γράφος γειτνίασης** ενός στιγμιότυπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης N, είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ όπου:

- Το σύνολο των κόμβων, V, δίνεται από το σύνολο των λύσεων (S).
- Το σύνολο των ακμών E ορίζεται έτσι ώστε $(i, j) \in E$ ανν $j \in N(i)$.
- Τέλος, ορίζουμε το βάρος του κάθε κόμβου ως το κόστος της λύσης στην οποία αντιστοιχεί.

- Έτσι, η εκτέλεση ενός αλγορίθμου τοπικής αναζήτησης σε ένα στιγμιότυπο, με μια συνάρτηση γειτνίασης, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας περίπατος πάνω στον αντίστοιχο γράφο γειτνίασης.

Παράδειγμα



Λύση	$f(s)$	$N(s)$
1	4	{3}
2	5	{4}
3	1	{1,6}
4	2	{2,5}
5	3	{4}
6	1	{3,7}
7	4	{6,8}
8	5	{7,9}
9	2	{9}

Επαναληπτική βελτίωση

- Όπως είδαμε, κάθε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης είναι ένας περίπατος πάνω στον γράφο γειτνίασης.
- Η πιο προφανής στρατηγική είναι ένας αλγόριθμος επαναληπτικής βελτίωσης hill climbing.
- Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος αναζητά στη γειτονιά της τρέχουσας λύσης για μια λύση με καλύτερο κόστος.
- Ο αλγόριθμος που διαλέγει κάθε φορά την γειτονική λύση με το καλύτερο κόστος, ονομάζεται αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης.

Τοπικό βέλτιστο

Ορισμός

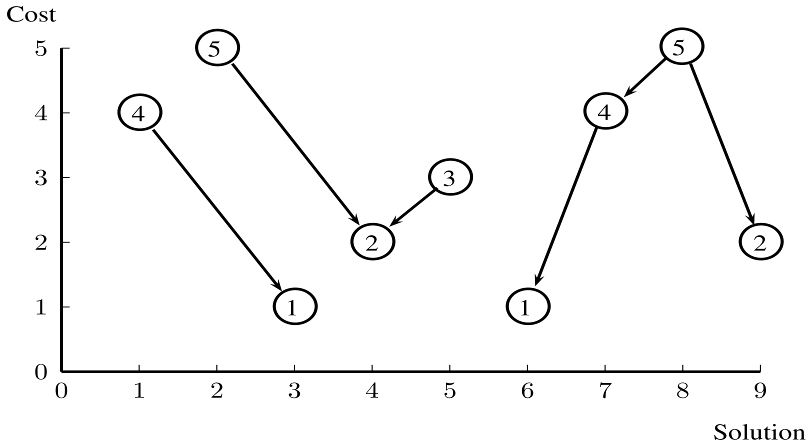
Μια λύση s' ονομάζεται **τοπικό βέλτιστο** σε σχέση με τη συνάρτηση N ανν $f(s') \leq f(s)$, για κάθε $s \in N(s')$, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αντίστοιχα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Ορισμός

Ο **γράφος μεταβάσεων** ενός στιγμιοτύπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης, είναι ένας άκυκλος κατευθυνόμενος υπογράφος του αντίστοιχου γράφου γειτνίασης G. Κατασκευάζεται αφαιρώντας από τον G όλες τις ακμές (i, j) για τις οποίες το κόστος του κόμβου j είναι μεγαλύτερο από το κόστος του κόμβου i.

- Παρατηρήστε, ότι μια λύση είναι τοπικό βέλτιστο ανν έχει βαθμό εξόδου 0 στον γράφο μεταβάσεων.

Παράδειγμα γράφου μεταβάσεων



- Παρατηρήστε ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης έχει πρόσβαση σε διαφορετικά τοπικά βέλτιστα ανάλογα με την επιλογή της αρχικής λύσης.

Το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή - TSP

Ορισμός

Έχουμε ένα σύνολο n πόλεων, $C = \{1, 2, .., n\}$ και ένα $n \times n$ πίνακα d , όπου $d_{i,j} \in \mathbb{N}^+$ η απόσταση από την πόλη i στην πόλη j. Ζητείται να βρεθεί μια «περιοδεία» με ελάχιστο μήκος. Δηλαδή, μια διάταξη τ του C που ελαχιστοποιεί τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_{\tau(i),\tau(i+1)} + d_{\tau(n),t(1)}.$$

(Το $\tau(i)$ εδώ, αντιστοιχεί στην i-οστή πόλη που επισκέπτεται, $\tau = (\tau(1), \tau(2), .., \tau(n))$.)

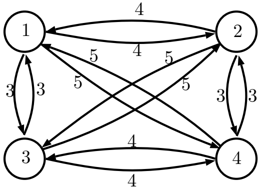
Παράδειγμα

- Ισοδύναμο με εύρεση ελάχιστου Hamiltonian κύκλου με βάρη σε ένα πλήρες, κατευθυνόμενο γράφημα n κόμβων με βάρη στις ακμές, όπου το βάρος της ακμής (i,j) είναι $d_{i,j}$.

Πχ. Για ένα στιγμιότυπο με n πόλεις και πίνακα αποστάσεων

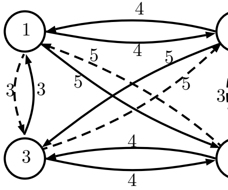
$$d = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

, έχουμε το γράφο



.

Και η περιοδεία $\tau = (1,2,3,4)$ είναι ο κύκλος *Hamilton* :



Γενικά για το πρόβλημα (Ι)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.
- Κάθε περιοδεία ορίζεται από τη σειρά των πόλεων (και μόνο - όχι από το ποια είναι η αρχική πόλη), άρα το μέγεθος του χώρου λύσεων είναι $(n-1)!$

Ειδικές περιπτώσεις:

- SYMMETRIC TSP. $d_{i,j} = d_{j,i}$.
- METRIC TSP. Ο πίνακας αποστάσεων ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα $(d_{i,j} \leq d_{i,k} + d_{k,j})$
- EUCLIDEAN TSP. Οι αποστάσεις των πόλεων είναι η ευκλείδεια απόστασή τους.

Γενικά για το πρόβλημα (II)

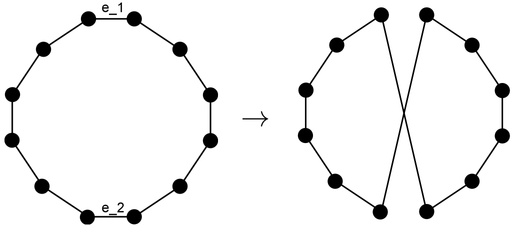
- Όλες οι παραπάνω παραλλαγές του προβλήματος είναι NP-hard.
- Διαφέρουν από άποψη προσεγγισιμότητας:
- Για τα TSP και SYMMETRIC TSP, η εύρεση μιας περιοδείας μήκους το πολύ $2^{p(n)}$ φορές τη βέλτιστη είναι $NP - hard$ για τυχαίο πολυώνυμο p. (*Sahni, Gonzalez [1976]*)
- Για το METRIC TSP υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου $\frac{3}{2}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος, αλλά η εύρεση περιοδείας με μήκος το πολύ $\frac{220}{219}$ φορές την βέλτιστη είναι NP-hard.(*Christofides [1976] - Cornuejols, Nemhauser [1978] - Papadimitriou, Vempala [2000]*)
- Για το EUCLIDEAN TSP, υπάρχει ένα PTAS, αλλά όχι FPTAS αν $P \neq NP$. (*Arora [1998] - Ausiello [1999]*)

Αλγόριθμος k-Opt

- Επαναληπτική βελτίωση με χρήση της συνάρτησης γειτνίασης k-change.
- Μια k-change διαγράφει $k' \leq k$ ακμές από τον αντίστοιχο κύκλο Hamilton της λύσης και τις αντικαθιστά με k' νέες, έτσι ώστε η καινούρια λύση να είναι ορθή (να είναι περιοδεία - κύκλος *Hamilton*).
- Μια λύση (περιοδεία) είναι γειτονική μιας άλλης αν μπορεί να παραχθεί με εφαρμογή μιας k-change στη δεύτερη.

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (Ι)

- Στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με 12 πόλεις και χρήση του k-opt με $k = 2$.
- Έστω τυχαία περιοδεία τ. Παράδειγμα εφαρμογής k-change αλλάζοντας τις ακμές e_1, e_2.



- Παρατηρήστε ότι για κάθε δυο ακμές υπάρχει μόνο μια δυνατή αντικατάσταση η οποία να οδηγεί σε μια *νέα* λύση που να είναι ορθή (Ham.).
- Επιπλέον δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε μόνο μια ακμή, η δυο διαδοχικές και να πάρουμε μια καινούρια, ορθή λύση.

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (II)

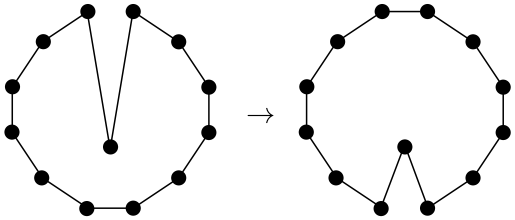
- Άρα, η γειτονιά μιας περιοδείας τ αποτελείται από την περιοδεία τ και μια περιοδεία για κάθε επιλογή δυο μη διαδοχικών ακμών e_2, e_2.
- Άρα το κάθε τ έχει $1 + n(n-3)/2 = 55$, ($\Theta(n^2)$) γείτονες. (Ο τύπος ισχύει για κάθε στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με χρήση της 2-change.)
- Παρατηρήστε ότι με τη χρήση της k-change στο SYMMETRIC TSP, αν έχουμε το μήκος l μιας περιοδείας και ψάχνουμε το μήκος l' μιας γειτονικής της, μπορούμε να το κάνουμε σε σταθερό χρόνο:

$$l' = l - \sum_{i=1}^{k'} d(e_i) + \sum_{i=1}^{k'} d(e_i'),$$

  Όπου $e_1, e_2, .., e_{k'}$ οι ακμές που διαγράφηκαν και $e_1', e_2', .., e_{k'}'$ οι ακμές που προστέθηκαν.
- Άρα, για το 2-change, μια επανάληψη της επαναληπτικής βελτίωσης γίνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$.

Εναλλακτική συνάρτηση γειτνίασης - node insertion

- Οι γείτονες μιας περιοδείας τ βρίσκονται διαγράφοντας μια πόλη στην τ και προσθέτοντάς την σε μια άλλη θέση στην περιοδεία (ανάμεσα σε δυο άλλους κόμβους).
- Παράδειγμα:



- Μια γενίκευση θα ήταν η εισαγωγή ενός τμήματος διαδοχικών πόλεων ανάμεσα σε δυο γειτονικές στην περιοδεία.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (I)

- Ποια από τις παραπάνω είναι καλύτερη για το πρόβλημα;
- Για να τις συγκρίνουμε αρκεί να μελετήσουμε τις ιδιότητες των γράφων γειτνίασης.
- Ο μέγιστος βαθμός συνδέεται με το κόστος της κάθε επανάληψης του αλγορίθμου (πλήθος γειτόνων).
- Η διάμετρος με το ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων που μπορεί να απαιτούνται.
- Προσέξτε ότι έτσι συγκρίνουμε μόνο τις συναρτήσεις γειτνίασης, ανεξάρτητα από την πολιτική επιλογής γείτονα από τον αλγόριθμο.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (II)

Θεώρημα

Η διάμετρος του γράφου γειτνίασης του node insertion για το TSP είναι $n-2$.

Απόδειξη

- **Βήμα** 1: $d \leq n-2$, όπου d η διάμετρος.
- Θα δείξουμε ότι για δυο τυχαίες περιοδείες τ, τ', η τ' μπορεί να παραχθεί από την τ εφαρμόζοντας το πολύ $n-2$ κινήσεις node insertion.
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\tau'(1) = \tau(1)$.
- Αφαιρούμε τις πόλεις $\tau'(3), \tau'(4), .., \tau'(5)$ από την τ και τις προσθέτουμε ακριβώς πίσω από την $\tau'(1)$ με αυτή τη σειρά. (Εξαιρούμε πόλεις που έχουν την ίδια θέση).
- Άρα το συνολικό πλήθος των node insertions είναι το πολύ $n-2$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

Απόδειξη.

Απόδειξη (cont.)

- **Βήμα 2**: $d \geq n - 2$.
- Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $d \leq n - 3$.
- Έστω η περιοδεία $\tau = (1, 2, ..., n)$ και η περιοδεία $\tau' = (n, n-1, .., 1)$.
- Αφού $d \leq n - 3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την τ' από την τ αλλάζοντας την θέση το πολύ $n - 3$ πόλεων, άρα κρατώντας την σχετική σειρά τουλάχιστον τριών πόλεων.
- Αυτό είναι άτοπο αφού για τρεις πόλεις i, j, k με $i < j < k$ έχουμε ότι η περιοδεία τ τις επισκέπτεται με σειρά i, j, k ενώ η τ' με σειρά k, j, i.

□

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

- Εύκολα βλέπουμε, ότι για το TSP κάθε κόμβος στον γράφο γειτνίασης του node insertion έχει βαθμό $n(n-3)$ για κάθε $n \geq 4$.
- Επιπλέον, για το γράφο γειτνίασης του 2-change ισχύουν:
  - Κάθε κόμβος έχει βαθμό $n(n-2)-2$.
  - Ο γράφος έχει διάμετρο d που ικανοποιεί $\frac{n}{2} \leq d \leq n-2$ για $n >= 5$.
- Άρα βλέπουμε ότι και οι δυο συναρτήσεις γειτνίασης έχουν γράφους μεταβάσεων με διάμετρο $\mathcal{O}(n)$ και μέγιστο βαθμό $\mathcal{O}(n^2)$.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (I)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.
  - Από von Neumann και Morgenstern (με βασικές παραδοχές) υπάρχει ανάθεση ποσού (αριθμητικού) σε κάθε συνδυασμό επιλογών των παικτών του παιγνίου που να αντιπροσωπεύει (σχετικά) το κέρδος του παίκτη.
- **Ευφυής**
  - Έχει πλήρη γνώση της δομής του παιχνιδιού και των διαθέσιμων στρατηγικών όλων των παικτών.
  - Μπορεί να κατανοήσει μια κατάσταση και να εξάγει συμπεράσματα γι΄ αυτήν.
  - Γνωρίζει ότι και οι άλλοι παίκτες είναι λογικοί και ευφυείς.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (II)

Παίγνιο σε στρατηγική μορφή

Ένα παίγνιο σε στρατηγική μορφή, είναι κάποιο Γ της μορφής:

$$\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

Όπου:

- N το σύνολο παικτών.
- C_i το σύνολο των διαθέσιμων *αγνών* στρατηγικών του παίκτη i.
- $u_i : \times_{j \in N} C_j \to \mathbb{R}$ το κέρδος του παίκτη i σε ένα *περίγραμμα στρατηγικών*.

Περίγραμμα στρατηγικής - Κατάσταση παιγνίου

Ένας συνδυασμός στρατηγικών (μια για κάθε παίκτη) που μπορούν να επιλέξουν οι παίκτες του συνόλου N. Συμβολίζουμε ως $C = \times_{j \in N} C_j$ το σύνολο όλων των πιθανών περιγραμμάτων αγνών στρατηγικών

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (III)

Μικτή στρατηγική

Δεδομένου ενός παιγνίου $\Gamma = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ μια **μικτή στρατηγική** του παίκτη i είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο C_i. Έστω $\Delta(C_i)$ το σύνολο όλων των δυνατών πιθανοτικών στρατηγικών του παίκτη i.

Περίγραμμα μεικτών στρατηγικών

- Ένα διάνυσμα που καθορίζει μια μικτή στρατηγική για κάθε παίκτη (σύνολο όλων των δυνατών περιγραμμάτων: $\times_{i\in N}\Delta(C_i)$).
- Δηλαδή, σ είναι περίγραμμα στρατηγικών, $\sigma \in \times_{i\in N}\Delta(C_i)$ ανν για κάθε $i \in N$ και $c_i \in C_i$ ορίζει την πιθανότητα $\sigma_i(c_i)$, $(\sigma = (\sigma_i)_{i\in N})$, ο παίκτης i να επιλέξει τη στρατηγική c_i έτσι ώστε:

$$\sum_{d_i \in C_i} \sigma_i(d_i) = 1, \quad \forall i \in N$$

Ισορροπία Nash

- Έστω $u_i(\sigma)$ το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη i στο περίγραμμα σ $\left(u_i(\sigma) = \sum_{c \in C} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(c_j) \right) u_i(c),\ \forall i \in N, c = (c_i)_{i \in N}\right)$
- Για $\tau_i \in \Delta(C_i)$ έστω (σ_{-i}, τ_i) το περίγραμμα στο οποίο ο i-οστός συντελεστής είναι τ_i και οι υπόλοιποι όπως στο σ (ένας παίκτης άλλαξε στρατηγική).

Ορισμός

Ένα περίγραμμα σ είναι **ισορροπία Nash** (NE) ανν δεν υπάρχει παίκτης που μπορεί να αυξήσει το κέρδος του αν αποκλίνει μονομερώς από το σ. δηλ:

$$u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall \tau_i \in \Delta(C_i)$$

Θεώρημα Nash

Θεώρημα Nash (*Nash, [1951]*)

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο Γ σε στρατηγική μορφή, υπάρχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash στο $\times_{i \in N} \Delta(C_i)$.

Ορισμός

Ένα περίγραμμα αγνών στρατηγικών $c \in C$ είναι **αγνή ισορροπία Nash** ανν:

$$u_i(c) \geq u_i(c_{-i}, d_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall d_i \in C_i$$

- Δεν υπάρχει πάντα.

Παίγνια δυναμικού (Ι)

Ορισμός

Έστω παίγνιο Γ και c, c' δυο οποιεσδήποτε καταστάσεις του (περιγράμματα) που διαφέρουν μόνο στην στρατηγική του παίκτη i. **Συνάρτηση δυναμικού** $\Phi : C \rightarrow \mathbb{R}$ όπου C το σύνολο καταστάσεων του παιγνίου, ονομάζεται μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$(u_i(c) - u_i(c')) \cdot (\Phi(c) - \Phi(c')) > 0, \text{ όταν } (u_i(c) - u_i(c') \neq 0.$$

Ορισμός

Παίγνιο δυναμικού, ονομάζεται ένα παίγνιο για το οποίο υπάρχει συνάρτηση δυναμικού.

Παίγνια δυναμικού (II)

Θεώρημα

Κάθε παίγνιο δυναμικού έχει τουλάχιστον μια αγνή ισορροπία κατά Nash.

Απόδειξη.

- Αφού το παίγνιο έχει πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται σε κάποιες από αυτές.
- Έστω c η κατάσταση στην οποία ελαχιστοποιείται και c' μια κατάσταση που διαφέρει από την c στη στρατηγική ενός μόνο παίκτη i.
- Έχουμε ότι $\Phi(c) \leq \Phi(c')$, που από ορισμό δυναμικής συνάρτησης σημαίνει $u_i(c) \leq u_i(c')$.
- Συνεπώς ο παίκτης i δεν έχει συμφέρον να αποκλίνει μονομερώς.

□

Παίγνια δυναμικού (III)

- Από το παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι κάθε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού είναι αγνή ισορροπία κατά *Nash*.

Θεώρημα

Για ένα παίγνιο δυναμικού Γ, *κάθε αλγόριθμος επαναληπτικής βελτίωσης με σύνολο λύσεων το σύνολο των καταστάσεων του παιγνίου* (C), *συνάρτηση γειτνίασης* $f : C \to 2^C$ *με* $\{f(c) = C_c | \forall c' \in C_c$ *οι* c *και* c' *διαφέρουν στη στρατ. ενός παίκτη*$\}$ *και συνάρτηση κόστους τη συνάρτηση δυναμικού , καταλήγει σε αγνή ισορροπία Nash.*

Απόδειξη.

Προφανής. □

Παίγνια συμφόρησης (I)

Ορισμός

Ένα **παίγνιο συμφόρησης** $(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (f_e)_{e \in E})$ ορίζεται ως εξής:

- $N = \{1..n\}$ το σύνολο των παικτών.
- $E = \{1..m\}$ το σύνολο των πόρων.
- Για κάθε $i \in N$, το σύνολο των στρατηγικών του i, Σ_i , είναι ένα υποσύνολο των πώρων (που χρησιμοποιεί ο παίκτης).
- Για κάθε $e \in E$, $f_e : N \to R^+$ είναι η συνάρτηση καθυστέρησης του πόρου e. Αν x παίκτες χρησιμοποιούν τον πόρο e η $f_e(x)$ δείχνει σε πόση καθυστέρηση υπόκεινται.

Παίγνια συμφόρησης (II)

Θεώρημα (Θεώρημα. Συνάρτηση Rosenthal)

Η συνάρτηση $\Phi(c) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(c)} f_e(i)$, *όπου* c *μια κατάσταση και* $n_e(c)$ *το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον πόρο* e *στην κατάσταση* c, *αποτελεί ακριβή συνάρτηση δυναμικού για κάθε παίγνιο συμφόρησης.*

PO και NPO (I)

- Αντίστοιχες των P και NP για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

NPO

Περιέχει τα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης για τα οποία:

- Μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο κατά πόσον μια είσοδος x ορίζει ένα έγκυρο στιγμιότυπο του προβλήματος...
- Για το οποίο η συνάρτηση κόστους είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο..
- Και μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να αποφασίσουμε αν μια συμβολοσειρά s είναι αποδεκτή λύση του στιγμιότυπου, όπου το μέγεθος της κάθε αποδεκτής λύσης είναι μικρότερο από ένα όριο που είναι πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους της μεταβλητής εισόδου.

PO και NPO (II)

PO

Η PO περιέχει τα προβλήματα της κλάσης NPO για τα οποία μπορούμε να βρούμε τη βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ιδιότητες PO και NPO

- Προφανώς ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης.
- Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν η κλάση των «δύσκολων» προβλημάτων στην NPO ταυτίζεται με την κλάση των NP-hard προβλημάτων στην NPO.
- Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing που μας επιτρέπουν να ανάξουμε προβλήματα της NP σε προβλήματα της NPO.

Ιδιότητες PO και NPO (II)

- Θα ορίσουμε ένα NPO-πλήρες συνδυαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης και το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης και έπειτα θα δείξουμε ότι ανάγονται κατά Turing το ένα στο άλλο.

Ορισμός MVS

- Έστω ένα σύνολο δυαδικών μεταβλητών $U = x_1, x_2, ..x_n$, ένα σύνολο λογικών προτάσεων C της μορφής $c = (c_1 \vee c_2 \vee .. \vee c_m)$ (ρήτρες) με μεταβλητές (η αρνήσεις τους) από το U και ένα βάρος $w(x_i)$ για κάθε μεταβλητή x_i.
- Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μια ανάθεση τιμών αληθείας που να ικανοποιεί όλες τις ρήτρες στο C, **μεγιστοποιώντας** το άθροισμα των βαρών των μεταβλητών που έχουν αποτιμηθεί ως αληθείς.

Ιδιότητες PO και NPO (III)

Ορισμός MVS_{dec}

- Έχουμε $MVS \in NPO$. Το MVS_{dec} είναι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ($MVS_{dec} \in NP$).
- Δηλαδή πρέπει να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια ανάθεση τιμών αληθείας που να ικανοποιεί όλες της ρήτρες και το κόστος της να είναι ίσο η μεγαλύτερο ενός κάτω ορίου B.

Λήμμα

Τα MVS και MVS_{dec} ανάγονται κατά Turing το ένα στο άλλο.

Απόδειξη.

1. $MVS_{dec} \leq_T MVS$, προφανές.

Ιδιότητες PO και NPO (IV)

Απόδειξη. (cont.)

2. $MVS \leq_T MVS_{dec}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το MVS χρησιμοποιώντας ένα μαντείο για το MVS_{dec}.
   - Κατασκευάζουμε τον αλγόριθμο που υπολογίζει το μέγιστο δυνατό κόστος που μπορεί να έχει μια απόδοση τιμών αληθείας σε ένα στιγμιότυπο.
   - Μπορούμε να το κάνουμε σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας το μαντείο του MVS_{dec}:
   - Κάνουμε δυαδική αναζήτηση στο εύρος $[0, \sum_i w(x_i)]$ και βρίσκουμε το μεγαλύτερο B για το οποίο το MVS_{dec} επιστρέφει θετικό αποτέλεσμα (αλγόριθμος A_1).

Ιδιότητες PO και NPO (V)

Απόδειξη. (cont.)

- Αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο (πολ. χρόνου) που θα βρίσκει την ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τις ρήτρες και έχει κόστος ίσο με το αποτέλεσμα του A_1 στο αρχικό στιγμιότυπο.
- Περιγραφή του αλγορίθμου, στο βήμα i:
- Κατασκεύασε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I_0 από το αρχικό πρόβλημα, αντικαθιστώντας τις $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ με τις τιμές που έχουν επιστρέψει τα πρώτα $i-1$ βήματα και θέσε $x_i = 0$.
- Όμοια κατασκευάζουμε το I_1 θέτοντας $x_i = 1$.
- Τρέξε τον A_1 στα I_0 και I_1 αντίστοιχα και ανάλογα με το ποιο στιγμιότυπο επιστρέφει τη μεγαλύτερη έξοδο, θέσε και το x_i.

□

Ιδιότητες PO και NPO (VI)

Θεώρημα

Το MVS είναι NPO-πλήρες (G. Ausiello et al. (1999))

Θεώρημα

Ένα πρόβλημα $\Pi \in NPO$ *είναι NPO-πλήρες ανν το* Π *είναι NP-δύσκολο. (Αν χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing για να συσχετίσουμε την πολυπλοκότητα των προβλημάτων)*

Απόδειξη.

- Προφανώς αν Π NPO-πλήρες είναι και NP-δύσκολο.
- Έστω ότι το Π είναι NP-δύσκολο.
- Τότε το $MVS \leq_T MVS_{dec} \leq_T \Pi$ και το MVS είναι NPO-πλήρες.

□

Ιδιότητες PO και NPO (VII)

Θεώρημα

$PO = NPO$ *ανν* $P = NP$.

Απόδειξη.

1. Αν $PO = NPO$ τότε όλα τα NP-δύσκολα προβλήματα της NPO (πχ TSP) μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, άρα $P = NP$.
2. Αν $P = NP$ τότε το MVS_{dec} μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Αλλά $MVS \leq_T MVS_{dec}$ (λύνεται σε πολ. χρόνο) και το MVS είναι NPO-πλήρες.

$\square$

Εισαγωγή

Ορισμός

Στιγμιότυπο ενός προβλήματος τοπικής αναζήτησης είναι η τριάδα (S, f, N) με (S, f) ένα στιγμιότυπο ενός συνδυαστικού προβλήματος βελτιστοποίησης και $N : S \to 2^S$ μια συνάρτηση γειτνίασης για το S.

Ορισμός

Ένα **πρόβλημα τοπικής αναζήτησης** Π_{LS} ορίζεται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων και από το αν είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης η μεγιστοποίησης.
Δεδομένου ενός στιγμιότυπου (S, f, N), ζητείται μια τοπικά βέλτιστη λύση $\hat{s} \in N(s)$ (πχ. $f(\hat{s}) \geq f(s)$, $\forall s \in N(s)$, για πρόβλημα βελτιστοποίησης).

Ορισμός PLS

Ορισμός

Έστω πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} και Π το αντίστοιχο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Λέμε ότι το Π_{LS} ανήκει στην κλάση PLS αν $\Pi \in NPO$ και υπάρχουν δυο αλγόριθμοι A, B, πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

1. Για ένα στιγμιότυπο (S, f, N) του Π_{LS} ο αλγόριθμος A επιστρέφει μια λύση $s \in S$.
2. Για ένα στιγμιότυπο (S, f, N) του Π_{LS} και μια λύση s, ο αλγόριθμος B αποφασίζει αν η s είναι τοπικό βέλτιστο και, αν όχι, επιστρέφει μια γειτονική της λύση με καλύτερο κόστος.

- Προσέξτε ότι παρ' ότι η κλάση ονομάζεται **Polynomial-time Local Search**, το «polynomial» αναφέρεται στους αλγορίθμους A, B του ορισμού και όχι στο χρόνο επίλυσης του προβλήματος. (μπορεί να απαιτείται εκθετικός αριθμός επαναλήψεων).

Αναγωγές PLS (I)

- Θα ορίσουμε αναγωγές μεταξύ των προβλημάτων της κλάσης, για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Ορισμός

Λέμε ότι το πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} είναι PLS-reducible σε ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π'_{LS} ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS}$) αν υπάρχουν δυο αλγόριθμοι ϕ_1 και ϕ_2 πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

- Ο αλγόριθμος ϕ_1 μετατρέπει ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS} σε στιγμιότυπο $\phi_1(I)$ του προβλήματος Π'_{LS}.
- Ο αλγόριθμος ϕ_2 αντιστοιχίζει ένα στιγμιότυπο $I = (S, f, N)$ του Π_{LS} και μια λύση $s' \in S'$ με $\phi_1(I) = (S', f', N')$ με μια λύση $s \in S$.
- Για ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS}, αν $s' \in S'$ τοπικό ελάχιστο για το $\phi_1(I) = (S', f', N')$, τότε το $\phi_2(I, s')$ είναι τοπικό ελάχιστο για το I.

Το ζεύγος (ϕ_1, ϕ_2) καλείται **PLS-reduction** (PLS-αναγωγή).

Αναγωγές PLS (II)

- Παρατηρήστε από τον ορισμό, ότι αν $\Pi_{ls} \propto \Pi'_{LS}$ και το Π'_{LS} έχει αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, το ίδιο ισχύει και για το Π_{LS}. (Το Π'_{LS} είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το Π_{LS}).
- Οι PLS-αναγωγές, είναι μεταβατικές.
  ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS} \wedge \Pi'_{LS} \propto \Pi''_{LS} \Rightarrow \Pi_{LS} \propto \Pi''_{LS}$)

Ορισμός

Ένα πρόβλημα $\Pi_{LS} \in PLS$ καλείται **PLS-πλήρες** αν για κάθε $\Pi'_{LS} \in PLS$ ισχύει $\Pi'_{LS} \propto \Pi_{LS}$.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (I)

Θεώρημα

$PLS \subseteq NPO$

Απόδειξη.

- Έστω $\Pi_{LS} \in PLS$. Το κωδικοποιούμε σαν πρόβλημα $\Pi \in NPO$:
- Για κάθε στιγμιότυπο $(S, f, N) \in \Pi_{LS}$ ορίζουμε ένα στιγμιότυπο $(S, f') \in \Pi$ χρησιμοποιώντας για f' τη συνάρτηση $f' : S \to \{0, 1\}$ για την οποία $f'(s) = 0$ αν το s είναι τοπικό βέλτιστο και $f'(s) = 1$ αλλιώς.
- Από τον ορισμό της PLS υπάρχει αλγόριθμος (B) που αποφασίζει σε πολ. χρόνο αν μια λύση είναι τοπικό ελάχιστο για το Π_{LS}. Άρα και η f' μπορεί να τρέξει σε πολ. χρόνο.
- Έτσι Π_{LS} και Π ισοδύναμα και $\Pi \in NPO$.

□

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (II)

Θεώρημα

$PO \subseteq PLS$

- Με αντίστοιχη απόδειξη.

Έτσι:

Θεώρημα

$PO \subseteq PLS \subseteq NPO$

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (III)

Θεώρημα

Αν $NP \neq co-NP$, τότε κανένα από τα προβλήματα στην PLS δεν είναι NP-hard.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $\Pi_{LS} \in PLS$ που είναι NP-hard. Θα δείξουμε ότι αυτό αντιτίθεται στην περίπτωση $NP \neq co-NP$, δείχνοντας ότι για κάθε πρόβλημα απόφασης $\Pi_D \in NP$ συνεπάγεται ότι το συμπληρωματικό του, Π_D^c, ανήκει επίσης στην NP.

- Το Π_{LS} είναι NP-hard, άρα υπάρχει πολ. χρόνου αλγόριθμος A που αποφασίζει το Π_D, χρησιμοποιώντας ένα μαντείο που βρίσκει τοπικά βέλτιστα για στιγμιότυπα του Π_{LS}.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Άρα αν μας δοθεί η ακολουθία από τοπικά βέλτιστα που επιστρέφει το μαντείο του A κατά την εκτέλεσή του στο στιγμιότυπο I του Π_D, μπορούμε σε πολ. χρόνο να αποφασίσουμε αν το I είναι ένα ναι ή όχι-στιγμιότυπο του Π_D.
- Άρα αυτή η ακολουθία είναι ένα πιστοποιητικό, πολυωνυμικού μεγέθους, για ναι-στιγμιότυπα του Π_D^c.
- Το πιστοποιητικό, μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για ορθότητα, αντικαθιστώντας κάθε κλήση στο μαντείο στον A με μια πολυωνυμικού χρόνου διαδικασία που ελέγχει κατά πόσον η συγκεκριμένη λύση στο πιστοποιητικό είναι μια λύση στο στιγμιότυπο του Π_{LS} που δίνεται στον προφήτη.
- Αλλά εξ' ορισμού της PLS ένας τέτοιος αλγόριθμος υπάρχει.
- Άρα $\Pi_D^c \in NP$.

□

Συσχετισμός PLS με FNP

Με αντίστοιχο τρόπο βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει και το παρακάτω:

Θεώρημα

$PLS \subseteq FNP$

- Τα πιστοποιητικά ενός προβλήματος στην PLS είναι τα τοπικά βέλτιστα και
- ο τρίτος αλγόριθμος στην περιγραφή ενός προβλήματος στην PLS τα ελέγχει σε πολυωνυμικό χρόνο.

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (I)

Ορισμός

Για ένα *Boolean* κύκλωμα D με n κόμβους εισόδου $\{x_1, \dots, x_n\}$ και κόμβους εξόδου $\{y_1, \dots, y_m\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση γειτνίασης flip ως εξής:

- Το πεδίο τιμών (σύνολο των λύσεων) είναι όλα τα πιθανά διανύσματα εισόδου του κυκλώματος.
- Δυο λύσεις s, s' είναι γειτονικές, αν η απόστασή τους κατά Hamming είναι ένα.

Το ζητούμενο είναι μια λύση $\hat{s}$ που να αποτελεί τοπικό βέλτιστο για τη συνάρτηση κόστους: $f(\hat{s}) = \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} y_i$.

Στο **MIN-CIRCUIT/flip** στόχος είναι η εύρεση τοπικών ελαχίστων, ενώ στο **MAX-CIRCUIT/flip** η εύρεση τοπικών μεγίστων.

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (II)

Θεώρημα

Τα MIN-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip είναι PLS-πλήρη.

Διαδικασία (πάνω πάνω):

- Δείχνουμε ότι MIN-CIRCUIT/flip $\propto$ MAX-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip $\propto$ MIN-CIRCUIT/flip
- Για κάθε $\Pi_{LS} \in PLS$ πρόβλημα ελαχιστοποίησης δείχνουμε ότι $\Pi_{LS} \propto$ MIN-CIRCUIT/flip και για $\Pi LS'$ πρόβλημα μεγιστοποίησης ότι $\Pi'_{LS} \propto$ MAX-CIRCUIT/flip.
- Χρησιμοποιούμε το θεώρημα που λέει ότι για πολ. υπολογίσιμη δυαδική συνάρτηση f υπάρχει πολ. χρόνου αλγόριθμος που κατασκευάζει κύκλωμα σταθερού μεγέθους εισόδου n που υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης για οποιαδήποτε είσοδο με n ψηφία.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (I)

Θεώρημα

Το πρόβλημα της εύρεσης μιας αγνής ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δυναμικού, όπου ο αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι PLS-πλήρες.

Απόδειξη

- Εύκολα βλέπουμε ότι αν Γ παίγνιο δυναμικού, $\Gamma \in PLS$.
- Θα δείξουμε ότι WIGHTED SAT $\propto$ ΕΥΡΕΣΗ ΑΓΝΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΥΜΦΟΡΗΣΗΣ
- Έστω στιγμιότυπο WEIGHTED SAT με μεταβλητές $x_1, x_2, .., x_k$ και προτάσεις $C_i, C_2, ..., C_n$ με βάρος w_j για κάθε πρόταση C_j.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (II)

Απόδειξη (cont.)

- Κατασκευάζουμε παίγνιο συμφόρησης $(N, E, (\Sigma_i)_{i\in N}, (f_e)_{e\in E})$ ως εξής:
- Για κάθε μεταβλητή έχουμε έναν παίκτη. Άρα το σύνολο N αποτελείται από k παίκτες.
- Για κάθε πρόταση έχουμε έναν πόρο. Άρα το σύνολο E αποτελείται από n πόρους.
- Κάθε παίκτης i (μεταβλητή x_i) έχει δυο στρατηγικές.
  1. Να διαλέξει το σύνολο πόρων S_i που είναι οι αντίστοιχοι πόροι των προτάσεων που περιέχουν το x_i (αντιστοιχεί στο να θέσουμε $x_i = 0$) ή
  2. το $\hat{S}_i$ που είναι οι αντίστοιχοι πόροι των προτάσεων που περιέχουν το $\hat{x}_i$.(αντιστοιχεί στο να θέσουμε $x_i = 1$

  αυτό μοντελοποιεί την ανάθεση τιμής της μεταβλητής x_i. Έτσι ορίσαμε το Σ_i.

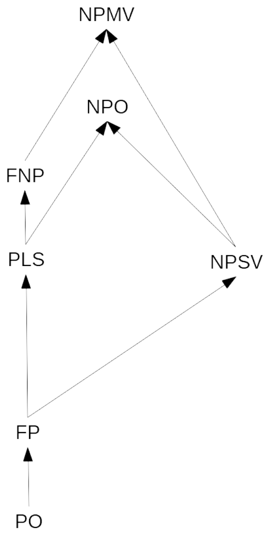
PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (III)

Απόδειξη (cont).

- Η συνάρτηση κόστους f_j του κόμβου j που αντιστοιχεί στην πρόταση C_j ορίζεται ως εξής: $f_j(\xi) = 0$ αν $\xi < k_j$ και $f_j(k_j) = w_j$ όπου k_j το πλήθος των μεταβλητών της πρότασης C_j. (προβλ. ελαχιστοποίησης)
- Η συνάρτηση δυναμικού που για μια κατάσταση s ορίζεται ως $\Phi(s) = \sum_j f_j(\xi_j)$ όπου ξ_j ο αριθμός των μεταβλητών με λογική τιμή 0 στην πρόταση C_j - το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο πόρο.
- Έτσι η παραπάνω συνάρτηση δυναμικού ισοδυναμεί με το βάρος της αντίστοιχης τιμοδοσίας s στο αντίστοιχο πρόβλημα WEIGHTED SAT.

$\square$

Ο κόσμος μέχρι τώρα



Σχήμα: Διαδικασία αναζήτησης

Εισαγωγή

- Μέχρι στιγμής, ορίσαμε την κλάση PLS για προβλήματα τοπικής αναζήτησης και είδαμε ότι η εύρεση αγνής ισορροπίας Nash, σε παίγνια που είναι σίγουρο ότι υπάρχει, ανήκει στα δυσκολότερα προβλήματα της κλάσης.
- Το θεώρημα Nash όμως λέει ότι κάθε παίγνιο σε στρατηγική μορφή έχει τουλάχιστον μια μικτή ισορροπία.
- Ποια είναι όμως η πολυπλοκότητα εύρεσης μιας τέτοιας ισορροπίας;

Κατάλληλη κλάση πολυπλοκότητας (Ι)

- Όπως είδαμε παραπάνω, η κλάση *NP* δεν είναι κατάλληλη για προβλήματα αναζήτησης καθώς περιέχει προβλήματα απόφασης όπου η σωστή απάντηση σε ένα στιγμιότυπο είναι είτε "ναι" είτε "όχι".
- Για αυτό ορίσαμε το συναρτησιακό ανάλογο της *NP*, την *FNP*.
- Ένας αλγόριθμος για ένα πρόβλημα στην *FNP* παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο προβλήματος της *NP* (πχ του *TSP*) και επιστρέφει μια λύση - "μάρτυρα" (πχ. έναν κύκλο Hamilton), αν υπάρχει, η "όχι" αλλιώς.

Κατάλληλη κλάση πολυπλοκότητας (II)

- Οι αναγωγές μεταξύ προβλημάτων αναζήτησης ακολουθούν την γενική μορφή είδαμε και για την τοπική αναζήτηση.
- Ορίζονται ως δυο πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμοι, ένας αλγόριθμο A που αντιστοιχίζει στιγμιότυπα x του ενός προβλήματος σε στιγμιότυπα $A(x)$ του άλλου και ένας αλγόριθμο B που αντιστοιχίζει λύσεις του $A(x)$ σε λύσεις του x (και το "όχι" στο "όχι").
- Η διαίσθηση που έχουμε για τα προβλήματα της *NP* δουλεύει για την *FNP*. Το θεώρημα του Cook, για την NP-πληρότητα του *SAT* επεκτείνεται εύκολα για το συναρτησιακό ανάλογο του *SAT* στην *FNP*.
- Τι ισχύει για την εύρεση μικτών ισορροπιών Nash; Είναι FNP-πλήρες πρόβλημα;

Bimatrix games

- Θα αναλύσουμε μια υποκατηγορία παιγνίων σε στρατηγική μορφή, τα *bimatrix games*.
- Ουσιαστικά μιλάμε απλώς για παίγνια δυο παικτών. Ο όρος bimatrix αναφέρεται στον τρόπο αναπαράστασης των κοστών των αγνών στρατηγικών κάθε παίκτη.
- Έτσι, η είσοδος είναι δυο πίνακες $m \times n$ κοστών A και B, ένας για τον παίκτη γραμμή και ένας για τον παίκτη στήλη (όπου m και n τα αντίστοιχα πλήθη αγνών στρατηγικών). Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός μικτών στρατηγικών $\hat{x}$ και $\hat{y}$ τέτοιων ώστε:

$$\hat{x}^T A\hat{y} \geq x^T A\hat{y}$$

για κάθε μικτή στρατηγική γραμμής x και

$$\hat{x}^T B\hat{y} \geq \hat{x}^T By$$

για κάθε μικτή στρατηγική στήλης y.

Γιατί όχι FNP;

Θεώρημα

Αν ο υπολογισμός μιας μικτής ισορροπίας Nash (MNE) ενός bimatrix game είναι FNP-πλήρες πρόβλημα, τότε $NP = coNP$.

Απόδειξη

- Έστω ότι υπάρχει αναγωγή από το συναρτησιακό SAT στον υπολογισμό MNE ενός bimatrix game. Τότε θα υπάρχουν οι παρακάτω αλγόριθμοι:

1. Ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος A που αντιστοιχίζει κάθε φόρμουλα SAT ϕ σε ένα bimatrix game $A(\phi)$.
2. Ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος B που αντιστοιχίζει κάθε MNE $(\hat{x}, \hat{y})$ ενός παιχνιδιού $A(\phi)$ σε:
   - μια ανάθεση $B(\hat{x}, \hat{y})$ που ικανοποιεί την ϕ, αν υπάρχει,
   - στην έξοδο "όχι" αλλιώς.

Απόδειξη (cont.)

- Η ύπαρξη όμως των παραπάνω αλγορίθμων θα σήμαινε ότι $NP = coNP$.
- Έστω ένα τυχαίο "όχι" στιγμιότυπο ϕ του SAT, και μια τυχαία MNE $(\hat{x}, \hat{y})$ του $A(\phi)$ (από Nash υπάρχει πάντα - ξεχνάμε κάτι;)
- Τότε, το $(\hat{x}, \hat{y})$ είναι πιστοποιητικό για το UNSAT, που μπορώ να ελέγξω σε πολυωνυμικό χρόνο:
  1. Υπολογίζουμε το παίγνιο $A(\phi)$, χρησιμοποιώντας τον A και πιστοποιούμε ότι το $(\hat{x}, \hat{y})$ είναι MNE για το $A(\phi)$.
  2. Τρέχουμε τον B για να πιστοποιήσουμε ότι το $B(\hat{x}, \hat{y})$ είναι το "όχι".

$\square$

- Το πρόβλημα προκύπτει από την αναντιστοιχία ενός FNP-πλήρους προβλήματος, όπου ένα στιγμιότυπο μπορεί να μην έχει "μάρτυρα" (witness) (η σωστή απάντηση μπορεί να είναι "όχι") και ενός προβλήματος όπως τον υπολογισμό MNE όπου κάθε στιγμιότυπο έχει τουλάχιστον ένα.

TFNP

- Συνεπώς, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το υποσύνολο των προβλημάτων της FNP των οποίων κάθε στιγμιότυπο έχει τουλάχιστον έναν witness.
- Η κλάση αυτή ονομάζεται **TFNP** (total functional NP).
- Η παραπάνω απόδειξη, δείχνει ότι αν οποιοδήποτε πρόβλημα στην TFNP είναι FNP-πλήρες, τότε $NP = coNP$.
- Επιπλέον, αφού κάθε πρόβλημα στην PLS έχει τουλάχιστον έναν witness (η τοπική αναζήτηση πάντα βρίσκει τοπικό βέλτιστο), $PLS \in TFNP$.
- (άρα και πάλι, αν ένα PLS πρόβλημα είναι FNP-πλήρες, $NP = coNP$)

Συντακτικές vs σημασιολογικές Κ.Π. (I)

- Είδαμε, ότι δεν περιμένουμε να ισχύει ότι το MNE είναι FNP-πλήρες. Μήπως όμως είναι TFNP-πλήρες;
- Γενικότερα, υπάρχουν TFNP-πλήρη προβλήματα;
- Οι κλάσεις για τις οποίες έχουμε δει πλήρη προβλήματα (πχ NP, P, PSPACE είναι "**συντακτικές**".
- Δηλαδή μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την ιδιότητα μέλους σε αυτές μέσω της αποδοχής από ένα συγκεκριμένο υπολογιστικό μοντέλο (πχ πολυωνυμικού χρόνου η χώρου μηχανών Turing).
- Η TFNP όμως, δεν έχει γενικό κανόνα για τα μέλη της - (και γι΄ αυτό θεωρείται **σημασιολογική**).
- Για παράδειγμα ο υπολογισμός MNE είναι στην TFNP λόγω του θεωρήματος του Nash (με τοπολογικά επιχειρήματα) ενώ το factoring ανήκει στην TFNP με αριθμοθεωρητική εξήγηση.
- Θα μπορούσαν πχ τα παραπάνω προβλήματα να θεωρηθούν ως δυο διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου "γενικού" TFNP προβλήματος;

Συντακτικές vs σημασιολογικές Κ.Π. (ΙΙ)

Στόχος είναι να ταυτοποιήσουμε υποκλάσεις της TFNP οι οποίες:

1. Να περιέχουν ενδιαφέροντα υπολογιστικά προβλήματα που δεν είναι γνωστό ότι ανήκουν στο P (πχ MNE).
2. Να έχουν πλήρη προβλήματα (δηλαδή να είναι συντακτικές - με γενικό λόγο για την ιδιότητα μέλους).

- Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η PLS. (γιατί;)

PPAD - εισαγωγή (I)

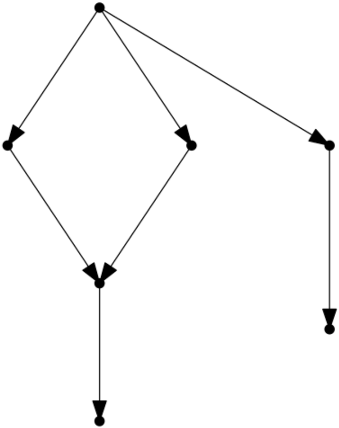
- Για να μελετήσουμε τον υπολογισμό MNE σε bimatrix games θα ορίσουμε την κλάση PPAD (polynomial parity argument, directed version?)
- Όπως είδαμε παραπάνω μπορούμε να δούμε ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης ως το πρόβλημα εύρεσης μιας sink κορυφής σε έναν άκυκλο κατευθυνόμενο γράφο.
- Οι τρεις αλγόριθμοι που ορίζουν ένα PLS πρόβλημα, ορίζουν έναν άμεσο αλγόριθμο διάτρεξης-μονοπατιού (path-following) σε αυτόν τον γράφο (ο πρώτος αλγόριθμος μας δίνει τον αρχικό κόμβο και ο τρίτος τον επόμενο ενός μη-sink κόμβου).

PPAD - εισαγωγή (II)

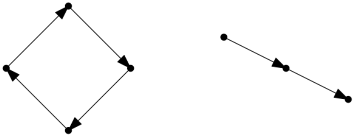
- Τα προβλήματα στην PPAD είναι εκείνα που λύνονται από μια συγκεκριμένη κλάση απλοϊκών αλγορίθμων διάτρεξης-μονοπατιών (κατευθυνόμενων).
- Όπως με τα προβλήματα στην PLS, ένα πρόβλημα στην PPAD μπορεί να θεωρηθεί ως κατευθυνόμενος γράφος, όπου οι κορυφές αντιστοιχούν στις ‘ἐνδιάμεσες καταστάσεις”, και οι ακμές στις ‘ἑπόμενες λύσεις”.
- Σε αντίθεση με την PLS, ένας PPAD κατευθυνόμενος γράφος, αντί να είναι ακυκλικός, έχει βαθμό εισόδου και εξόδου το πολύ 1 (και τουλάχιστον έναν κόμβο-πηγή).
- Σε αντίθεση με τα προβλήματα στην PLS ένα πρόβλημα στην PPAD δεν έχει συνάρτηση κόστους (ψάχνουμε απλώς μια λύση.)

PPAD - εισαγωγή (III)

Παράδειγμα γράφων.:



Σχήμα: Πρόβλημα PLS



Σχήμα: Πρόβλημα PPAD

PPAD - ορισμός

Όμοια με την PLS ένα πρόβλημα στην PPAD ορίζεται από τρεις αλγορίθμους (συντακτικός ορισμός):

Ορισμός

Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση PPAD αν υπάρχουν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμοι τέτοιοι ώστε:

1. Δοθείσης συμβολοσειράς I ο αλγόριθμος αποφασίζει αν είναι στιγμιότυπο του Π και, αν ναι, υπολογίζει μια αρχική λύση $s_0 \in Sol(I)$.
2. Δοθέντων I, s, ο αλγόριθμος ελέγχει αν $s \in S(I)$ και, αν ναι, επιστρέφει μια λύση $pred(s) \in Sol(I)$, με $pred(s_0) = s_0$.
3. Δοθέντων I, s έλεγξε αν $s \in S(I)$ και, αν ναι, επέστρεψε μια λύση $succ(s)$, με $succ(s_0) \neq s_0$ και $pred(succ(s_0)) = s_0$.

PPAD εναλλακτικός ορισμός (I)

- Για να καταλάβουμε τον παραπάνω ορισμό καλύτερα μπορούμε να δούμε τον φυσικό ορισμό της PPAD από τον οποίο προέκυψε.
- Έστω ότι περιγράφουμε έναν (εκθετικά μεγάλο) γράφο, με σύνολο κορυφών $\{0,1\}^n$ με βαθμούς εισόδου και εξόδου το πολύ 1.
- Οι βαθμοί των κόμβων καθορίζονται από δυο κυκλώματα, P και N όπου το καθένα παίρνει ως είσοδο έναν κόμβο του γράφου (την κωδικοποίηση του - $\in \{0,1\}^n$) και επιστρέφει έναν άλλο κόμβο.
- Ερμηνεύουμε ότι ο γράφος έχει μια ακμή από τον v_1 στον v_2 άνν:
  - $P(v_2) = (v_1)$
  - $N(v_1) = (v_2)$
- Ουσιαστικά ερμηνεύουμε ότι το P επιστρέφει έναν πιθανό προηγούμενο κόμβο (Αλγ. 2) και το N έναν πιθανό επόμενο (Αλγ. 3).

PPAD εναλλακτικός ορισμός (II)

- Παρατηρήστε ότι έτσι, κάθε ζεύγος P και N και συνάρτηση $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ ορίζουν έναν γράφο.
- Έτσι, ορίζουμε το πρόβλημα:

Ορισμός (END OF THE LINE)

Δεδομένων δυο κυκλωμάτων P και N, όπως παραπάνω, αν 0^n είναι κόμβος με βαθμό 1, βρες έναν άλλο κόμβο με βαθμό 1, αλλιώς επέστρεψε "ναι".

- Έτσι, η PPAD ορίζεται ως:

Ορισμός (PPAD)

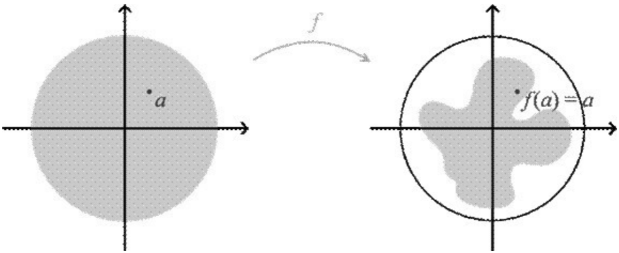
Η κλάση πολυπλοκότητας PPAD είναι το σύνολο {προβλήματα στην FNP που ανάγονται πολυωνυμικά στο END OF THE LINE }.

Brouwer's theorem

- Πως σχετίζονται τα προβλήματα στην PPAD με τον υπολογισμό MNE; (Η γενικότερα οποιοδήποτε φυσικό πρόβλημα;).

Θεώρημα (Σταθερού σημείου του Brouwer - 1911)

Έστω $S \subset R^n$ ένας κυρτός και συμπαγής (κλειστός και φραγμένος) χώρος. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S \to S$, υπάρχει σημείο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$ (σταθερό σημείο).



NASH → BROUWER

Ο Nash έδειξε το θεώρημα του παρουσιάζοντας μια αναγωγή από την ύπαρξη MNE σε πεπερασμένα παίγνια, στο θεώρημα σταθερού σημείου του Brower. Ας δούμε την βασική ιδέα:

NASH → BROUWER

- Έστω παίγνιο k παικτών, με σύνολα αγνών στρατηγικών $C_1, \ldots, C_k$ και συναρτήσεις κέρδους $u_1, \ldots, u_2$.
- Ο σχετικός κλειστός και συμπαγής χώρος είναι το $D = \Delta(C_1) \times \ldots \times \Delta(C_k)$, όπου $\Delta(C_i)$ οι μικτές στρατηγικές του παίκτη i.
- Θέλουμε να ορίσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f : D \to D$, από περιγράμματα μεικτών στρατηγικών σε περιγράμματα μικτών στρατηγικών, έτσι ώστε τα σταθερά σημεία της f να είναι MNE.
- Ορίζουμε την f ξεχωριστά για κάθε συνιστώσα $f_i : D \to \Delta(C_i)$

NASH → BROUWER (cont)

- Για να ορίσουμε την f_i θα χρησιμοποιήσουμε μια κανονικοποιημένη μορφή της καλύτερης απόκρισης του παίκτη i στα μεικτά προφίλ των άλλων παικτών (γιατί η ίδια δεν είναι συνεχής και καλά ορισμένη). Θέτουμε:

$$f_i(x_i, \vec{x}_{-i}) = \underset{x_i' \in \Delta(C_i)}{\operatorname{argmax}} g_i(x_i', \vec{x}),$$

όπου

$$g_i(x_i, \vec{x}) = \underbrace{\mathbb{E}_{c_i \sim x_i', c_{-i} \sim x_{-i}}[u(c)]}_{\text{γραμμικό στο } x_i'} - \underbrace{\| x_i' - x_i \|_2^2}_{\text{αυστηρά κυρτό}}$$

- Διαισθητικά, ο πρώτος όρος ευνοεί μια κίνηση καλύτερης απόκρισης ενώ ο δεύτερος αποθαρρύνει μεγάλες αλλαγές στη μικτή στρατηγική του i.

NASH $\rightarrow$ BROUWER (cont)

- Αφού η g_i είναι αυστηρά συμπαγής στο x_i', η f_i είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, η $f = (f_1, ..., f_k)$ είναι συνεχής.
- Από τον ορισμό όμως της f (των f_i) κάθε σταθερό σημείο είναι MNE (κανείς δεν έχει συμφέρον να αποκλίνει).
- Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι το $\vec{x}$ δεν είναι MNE, με τον παίκτη i να μπορεί να αυξήσει το αναμενόμενο κέρδος του, αποκλίνοντας από το x_i στο x_i'.
- Τότε, βλέπουμε ότι για αρκετά μικρό $\epsilon > 0$, $g_i((1-\epsilon)x_i + \epsilon x_i', \vec{x}) > g_i(x_i, \vec{x})$ (με απλές πράξεις).
- Έτσι, το $\vec{x}$ δεν είναι σταθερό σημείο του f.

Με βάση το παραπάνω βλέπουμε ότι αν ορίσουμε την εύρεση MNE ως πρόβλημα αναζήτησης:

Ορισμός ((ϵ-)NASH)

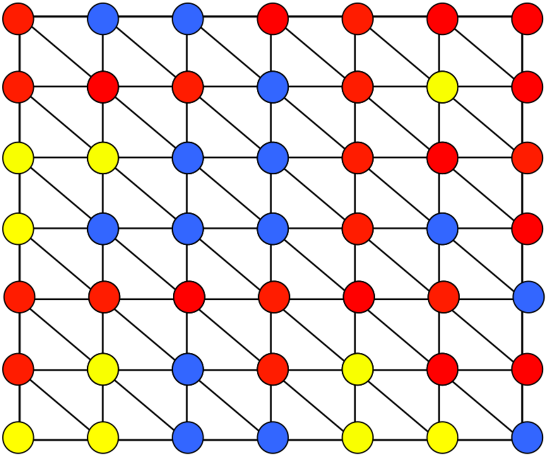
Δίνεται ως είσοδος το πλήθος των παικτών n, το σύνολο των στρατηγικών C_i του κάθε παίκτη i και η συνάρτηση κέρδους $u(\vec{x})$. Επιπλέον δίνεται και μια παράμετρος προσέγγισης $\epsilon > 0$. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα μεικτό περίγραμμα στρατηγικών στο οποίο κανένας παίκτης δεν έχει κέρδος παραπάνω από ϵ αν αποκλίνει μονομερώς.

- Το κίνητρο για να μιλήσουμε για προσεγγιστικές ισορροπίες είναι ότι, σε αντίθεση με τα παίγνια δυο παικτών, παρότι υπάρχει πάντα MNE, μπορεί περιλαμβάνει άρρητους αριθμούς.
- Από την παραπάνω απόδειξη φαίνεται ότι το $(\epsilon-)NASH$ ανάγεται στο αντίστοιχο πρόβλημα αναζήτησης σταθερού σημείου $(\epsilon-)BROUWER$.

Λήμμα του Sperner (2-d) (I)

Η επόμενη έννοια που θα μελετήσουμε, είναι το *Λήμμα του Sperner*. Αρχικά θα παρουσιάσουμε μια απλοποιημένη εκδοχή, στις δυο διαστάσεις.

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο και μια τριγωνοποίηση πάνω σε αυτό (όπως στο επόμενο σχήμα).
- Οι κορυφές που δημιουργούνται από την τριγωνοποίηση χρωματίζονται με έγκυρο τρόπο σύμφωνα με τους κανόνες:
    1. Οι κορυφές της αριστερής πλευράς πρέπει να **μην** έχουν χρώμα 1 (μπλε), οι κορυφές της πάνω και της δεξιά χρώμα 2 (κίτρινο) και οι κορυφές της κάτω πλευράς χρώμα 3 (κόκκινο).
    2. Οι κορυφές που δεν βρίσκονται στις εξωτερικές πλευρές μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε χρώμα (από τα τρία).



Σχήμα: Ένας έγκυρος χρωματισμός

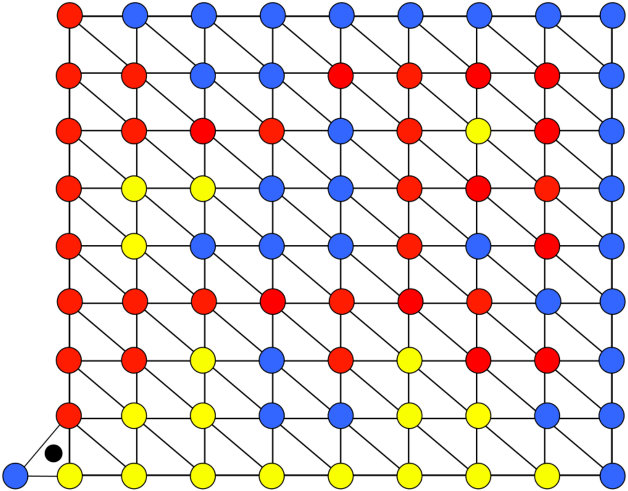
Λήμμα του Sperner (2-d) (II)

Ορισμός (Λήμμα του Sperner - 1928)

Σε κάθε τριγονοποίηση με νόμιμο χρωματισμό (με τους παραπάνω κανόνες), υπάρχει κάποιο τριχρωματικό τρίγωνο. Συγκεκριμένα, το πλήθος των τριχρωματικών τριγώνων είναι περιττό.

Απόδειξη.

- Για λόγους απλότητας, προσθέτουμε ένα εξωτερικό σύνορο, που δεν δημιουργεί επιπλέον τριχρωματικά τρίγωνα.
- Επιπλέον, δημιουργούμε ένα εξωτερικό "τεχνητό" τριχρωματικό τρίγωνο.
- Έπειτα ορίζουμε έναν κατευθυνόμενο περίπατο, που ξεκινάει από αυτό το τεχνητό τρίγωνο.
- Παρατηρήστε ότι οι κόμβοι του περιπάτου είναι τα τρίγωνα του επιπέδου.



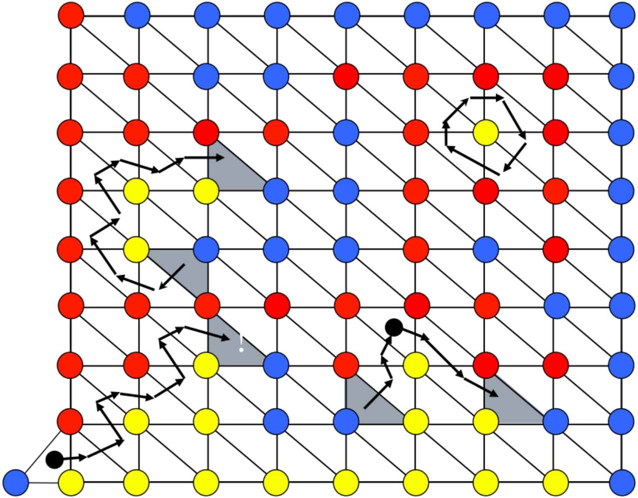
Σχήμα: Το νέο σχήμα

Λήμμα του Sperner (2-d) (III)

Απόδειξη. (cont).

- Ορίζουμε ως κανόνα μετάβασης τον εξής: Αν υπάρχει ακμή (στο τρίγωνο που βρισκόμαστε) με ένα κόκκινο και ένα κίτρινο άκρο, τη διασχίζουμε, με το κόκκινο άκρο να είναι "στα αριστερά μας".
- Αν παρατηρήσουμε λίγο την κατασκευή, παρατηρούμε ότι ο περίπατος δεν μπορεί να "βγει" από το παραλληλόγραμμο, ούτε να δημιουργήσει κύκλο.
- Συνεπώς, πρέπει να σταματήσει κάπου εντός του παραλληλογράμμου, πράγμα που μπορεί να συμβεί μόνο σε τριχρωματικό τρίγωνο.
- Αρχίζοντας από άλλα τριχρωματικά τρίγωνα, μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των τριχρωματικών τριγώνων είναι περιττό (εξαιρούμε το βοηθητικό τρίγωνο εκτός του σχήματος).

□



Σχήμα: Διαδικασία αναζήτησης

SPERNER

Μπορούμε τώρα, να ορίσουμε το σχετικό πρόβλημα αναζήτησης SPERNER:

Ορισμός (SPERNER)

Δίνεται ως είσοδος ένα πλέγμα $2^n \times 2^n$ κορυφών, όπου οι κορυφές των συνόρων έχουν κάποιον έγκυρο χρωματισμό (όπως παραπάνω). Θεωρούμε ότι το χρώμα κάθε εσωτερικής κορυφής, δίνεται από ένα κύκλωμα που παίρνει ως είσοδο τις συντεταγμένες της κορυφής και δίνει ως έξοδο το χρώμα. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα τριχρωματικό τρίγωνο στο πλέγμα.

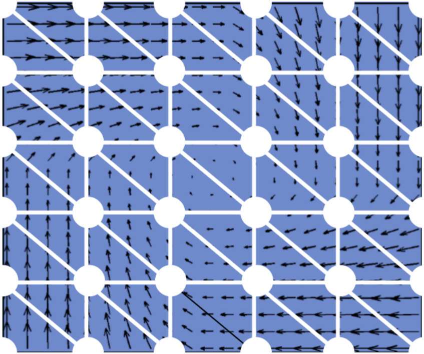
- Από την παραπάνω απόδειξη και τον δεύτερο ορισμό της PPAD είναι προφανές ότι το SPERNER ανάγεται στο END OF THE LINE και συνεπώς $SPERNER \in PPAD$.

BROUWER $\rightarrow$ SPERNER (I)

- Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι *NASH* $\rightarrow$ *BROUWER* και ότι *SPERNER* $\in$ *PPAD*.
- Για να δείξουμε ότι *NASH* $\in$ *PPAD* (αλλά και *BROUWER* $\in$ *PPAD*) αρκεί να δείξουμε ότι *BROUWER* $\rightarrow$ *SPERNER*.
- Θα αποδείξουμε την ύπαρξη σταθερού σημείου μέσω του λήμματος του SPERNER και μέσω της απόδειξης θα φανεί μια εμφανής αναγωγή εύρεσης σταθερού σημείου στο SPERNER.
- Ας πάρουμε μια κανονικοποιημένη συνάρτηση στο επίπεδο, $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε σταθερό σημείο.
- Η διαδικασία της απόδειξης (-αναγωγής) είναι η εξής:
  1. Για κάθε ϵ αποδεικνύουμε την ύπαρξη προσεγγιστικού σταθερού σημείου ($|f(x) - x| < \epsilon$) μέσω του λήμματος του SPERNER.
  2. Έπειτα χρησιμοποιούμε την συμπάγεια του χώρου, για να επεκτείνουμε σε ακριβή λύση (παίρνουμε το όριο του ϵ στο 0).

BROUWER → SPERNER (II)

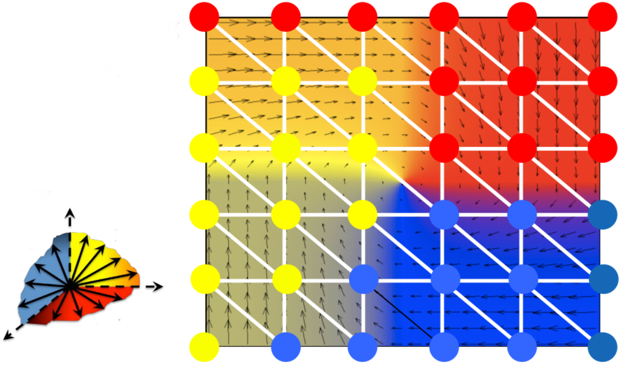
- Αρχικά κάνουμε μια “τριγωνοποίηση” στον χώρο που ορίζεται η f, θέτοντας την διάμετρο των τριγώνων σε μια τιμή που εξαρτάται από το ϵ:



Σχήμα: Τριγωνοποίηση

BROUWER → SPERNER (III)

- Έπειτα χρωματίζουμε τους κόμβους της τριγωνοποίησης με βάση την κατεύθυνση της $f(x) - x$.



Σχήμα: Χρωματισμός

BROUWER → SPERNER (IV)

- Με χρήση θεωρημάτων συνέχειας (της f), βλέπουμε ότι αν z^Y είναι η κίτρινη κορυφή ενός τριχρωματικού τριγώνου, τότε $|f(z^Y) - z^Y|_\infty < 2\epsilon$. Δηλαδή, ότι τα ϵ-προσεγγιστικά σταθερά σημεία βρίσκονται μέσα στα τριχρωματικά τρίγωνα.
- Για την γενίκευση σε ακριβές σταθερό σημείο:
  1. Διαλέγουμε μια ακολουθία από έψιλον, σαν γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\frac{1}{2}$ ($\epsilon_i = 2^{-i}$).
  2. Ορίζουμε την αντίστοιχη ακολουθία τριγωνοποιήσεων, με βάση τα παραπάνω ϵ και
  3. διαλέγουμε ένα τριχρωματικό τρίγωνο σε κάθε τριγωνοποίηση και παίρνουμε την ακολουθία z_i^Y διαλέγοντας την κίτρινη κορυφή του.
- Λόγω συμπάγειας, η παραπάνω ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία $w_i, i = 1, 2, ..$ με οριακό σημείο το w^*.
- Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f(w^*) = w^*$.

BROUWER → SPERNER (V)

- Προφανώς, η αναγωγή που προκύπτει από την παραπάνω απόδειξη, αφορά στο πρώτο κομμάτι και στην εύρεση **προσεγγιστικών** ισορροπιών Nash.
- Γενικότερα, το πρόβλημα της εύρεσης ακριβών MNE σε πεπερασμένα παίγνια, δεν γνωρίζουμε αν είναι στην PPAD (φαίνεται να είναι αυστηρά δυσκολότερο).
- Με μια τελείως διαφορετική αναγωγή οι Lemke και Howson έδειξαν ότι ειδικά για την περίπτωση δυο παικτών (bimatrix games) το πρόβλημα της ακριβούς εύρεσης MNE ανήκει στην PPAD.

Πολυπλοκότητα εύρεσης MNE

- Είδαμε, ότι η εύρεση MNE σε πεπερασμένα παίγνια, ανήκει στην PPAD. Όμως πόσο δύσκολη είναι;
- Οι Daskalakis, Goldberg, Papadimitriou (2006) έδειξαν ότι και τα τρία παραπάνω προβλήματα (SPERNER, BROUWER, NASH) είναι PPAD-πλήρη.
- Επιπλέον, από Chen, Deng, Teng (2009) ο υπολογισμός ακριβών ισορροπιών NASH σε bimatrix games είναι PPAD-πλήρες πρόβλημα.
- Αν δεχθούμε την υπόθεση, ότι τα παραπάνω προβλήματα δεν λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο, τι σημαίνει αυτό, για την ερμηνεία των ισορροπιών NASH ως συμπεριφορά φυσικών παικτών;

Σχετικές κλάσεις (I)

Χρησιμοποιώντας διάφορα λήμματα, μπορούμε να ορίσουμε και άλλες κλάσεις:

Ορισμός (PPADS)

Παρόμοια με την PPAD με τη διαφορά ότι αναζητούμε συγκεκριμένα μια κορυφή "sink", δηλαδή λύση με βαθμό εισόδου 1 και εξόδου 0.

Ορισμός (PPA)

Το ανάλογο της PPAD αλλά με μη κατευθυνόμενο γράφο.

Ορισμός (PPP)

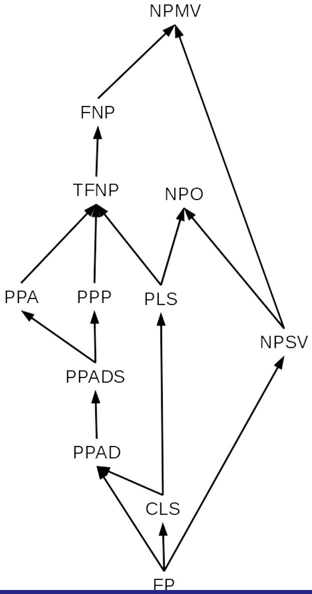
Σε αυτή την κλάση ορίζεται μία συνάρτηση f στο σύνολο των λύσεων: Στόχος μας είναι να βρούμε είτε μία λύση που απεικονίζεται στην αρχική λύση, είτε δύο λύσεις y και y_1, τέτοιες ώστε $f(x, y) = f(x, y_1)$. Τέτοιες λύσεις υπάρχουν πάντα λόγω της Αρχής του Περιστερεώνα (Polynomial Pigeonhole Principle).

Σχετικές κλάσεις (ΙΙ)

Ορισμός (CLS)

Το ανάλογο της PLS για συνεχείς χώρους και συναρτήσεις (Continuous Local Search). Η κλάση CLS περιέχει τα προβλήματα αναζήτησης προσεγγιστικού τοπικού βέλτιστου μιας συνεχούς συνάρτησης, με την βοήθεια ενός μαντείου f, όπου και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Ο κόσμος στο τέλος



Βιβλιογραφία

W. Michiels, E.H.L. Aarts, and J.H.M.Korst
Theoretical aspects of local search.
Springer, 2007.

S. Parsons.
Algorithmic Game Theory by noam nisan, tim roughgarden, éva tardos and vijay v. vazirani.
Cambridge university press, 2011

A.A. Schaffer and M. Yannakakis.
Simple local search problems that are hard to solve
SIAM J, 1991

A. Fabrikant, C.H. Papadimitriou, and K. Talwar.
The complexity of pure nash equilibria
In Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Chicago, IL, USA, June13-16,2004, pages604–612, 2004.