Σχήματα McCarthy I

Το **σχήμα McCarthy** είναι ένα γενικότερο προγραμματιστικό σχήμα:

$$f(x,y) = \textbf{if } g(\ldots) = 0 \textbf{ then } h(\ldots) \textbf{ else } k(\ldots)$$

όπου $g(\ldots)$, $h(\ldots)$ και $k(\ldots)$ είναι όροι-συναρτήσεις που κατασκευάζονται με σύνθεση και προβολές με x, y, f και άλλες "γνωστές" συναρτήσεις.

Παραδείγματα:

1. **επανάληψη**:
   $f(x) \;=\; \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } a \textbf{ else } g(f(x-1))$
2. **πρωταρχική αναδρομή**:
   $f(x,y) \;=\; \textbf{if } y = 0 \textbf{ then } g(x) \textbf{ else } h(x, y-1, f(x, y-1))$
3. **μ-σχήμα**: $f(x) = f'(x, 0)$ όπου:
   $f'(x,y) \;=\; \textbf{if } g(x,y) = 0 \textbf{ then } y \textbf{ else } f'(x, y+1)$

Σχήματα McCarthy II

Το McCarthy σχήμα ορίζει με μοναδικό τρόπο μία συνάρτηση f, στην πραγματικότητα το ελάχιστο σταθερό σημείο της $f = \tau(f)$, όπου τ είναι μία σύνθεση από συναρτησιακούς όρους και την **if-then-else** πρόταση. (Οι συναρτησιακοί όροι όπως και το **if-then-else** είναι συνεχείς!)

Παράδειγμα: $f(x,y) \;=\; \textbf{if } x = y \textbf{ then } y+1 \textbf{ else } f(x, f(x \dot{-} 1, y+1))$

Οι ακόλουθες συναρτήσεις αποτελούν όλες λύσεις (σταθερά σημεία):
(Επιβεβαιώστε το ελέγχοντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις!)

$$f_1(x,y) = x+1$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geqslant y \\ y \dot{-} 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geqslant y \text{ και abs(x-y) είναι άρτιος} \\ \text{δεν ορίζεται}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ισχύουν: $f_3 \sqsubset f_1$, $f_3 \sqsubset f_2$, αλλά $f_2 \not\sqsubseteq f_1$, $f_1 \not\sqsubseteq f_2$.
Π.χ.: $f_1(2,5) = 3$, $f_2(2,5) = 4$, $f_3(2,5)$: μη ορισμένο.

Σχήματα McCarthy III

Τι τιμή θα υπολογίσει μία υλοποίηση σε PASCAL για $f(2,5)$;

PASCAL συμβολισμός:

function $f(x,y$: integer): integer;
begin
  if $x = y$ **then** $f := y+1$ **else** $f := f(x, f(x-1, y+1))$
end

PASCAL υπολογισμός:

$$f(2,5) \vdash \textbf{if } 2=5 \textbf{ then } 5+1 \textbf{ else } f(2,f(1,6)) \vdash f(2,f(1,6))$$
$$\vdash f(2, \textbf{if } 1=6 \textbf{ then } 6+1 \textbf{ else } f(1,f(0,7))) \vdash f(2,f(1,f(0,7)))$$
$$\vdash \ldots \text{ επ' άπειρον, δηλαδή } f(2,5) \text{ δεν ορίζεται (επίσης και το } f_3(2,5)).$$

Στην παραπάνω ακολουθία υπολογισμού χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικούς μηχανισμούς: **απλοποιήσεις (simplifications)**, που είναι μαθηματικοί υπολογισμοί (if-then-else) και **αντικαταστάσεις (substitutions)** μίας ή περισσοτέρων εμφανίσεων του όρου $f(\ldots)$ με $\tau(f)(\ldots)$.

Υπολογιστικές Στρατηγικές I

Μία **υπολογιστική στρατηγική** καθορίζει ποιοι όροι πρέπει να αντικατασταθούν. Δίνουμε μερικά παραδείγματα στρατηγικών (υπογραμμίζουμε τους όρους που θα αντικατασταθούν):

- LI: **αριστερότερη-εσωτερικότερη (leftmost-innermost)**. Αντιστοιχία με την "κλήση με τιμή" ("call-by-value"), δηλαδή:

$$f(0, \underline{f}(0,1)) + f(f(2,0), f(3,1))$$

- LO: **αριστερότερη-εξωτερικότερη (leftmost-outermost)**. Αντιστοιχία με την "κλήση κατά όνομα" ("call-by-name"), δηλαδή:

$$\underline{f}(0, f(0,1)) + f(f(2,0), f(3,1))$$

- PI: **παράλληλη-εσωτερικότερη (parallel-innermost)**, δηλαδή:

$$f(0, \underline{f}(0,1)) + f(\underline{f}(2,0), \underline{f}(3,1))$$

Υπολογιστικές Στρατηγικές II

- PO: **παράλληλη-εξωτερικότερη (parallel-outermost)**, δηλαδή:

$$\underline{f}(0, f(0,1)) + \underline{f}(f(2,0), f(3,1))$$

- FA: **ελευθέρου ορίσματος (free-argument)** (υπάρχει τουλάχιστον ένα όρισμα ελεύθερο, δηλαδή δεν περιέχει την f):

$$\underline{f}(0, \underline{f}(0,1)) + f(\underline{f}(2,0), \underline{f}(3,1))$$

- FS: **πλήρους αντικατάστασης (full substitution)**, δηλαδή:

$$\underline{f}(0, \underline{f}(0,1)) + \underline{f}(\underline{f}(2,0), \underline{f}(3,1))$$

- **κανονική στρατηγική (normal strategy)**: βλέπε παρακάτω.

Υπολογιστικές Στρατηγικές III

Παρατήρηση: Δεν υπολογίζουν όλες οι στρατηγικές το ελάχιστο σταθερό σημείο. Για παράδειγμα, έστω:

$$f(x, y) \;=\; \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } f(x-1, f(x, y)).$$

Το ελάχιστο σταθερό σημείο είναι $f^*(x, y) = 1$ (επαλήθευση αργότερα). Από την άλλη, η LI στρατηγική υπολογίζει:

$$f_{\mathsf{LI}}(x, z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ \text{μη ορισμένη}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δηλαδή $f(1, 0) \vdash f(0, f(1, 0)) \vdash f(0, f(0, f(1, 0))) \vdash \ldots$

Υπολογιστικές Στρατηγικές IV

Εύρεση του ελάχιστου σταθερού σημείου ενός McCarthy σχήματος:

$$f(x) \;=\; \textbf{if } x > 10 \textbf{ then } x-5 \textbf{ else } f(x+3)$$

Ελάχιστο σταθερό σημείο:

$$f^*(x) = \begin{cases} x-5, & \text{αν } x > 10 \\ x-2 & \text{αν } 8 \leqslant x \leqslant 10 \\ x+1 & \text{αν } 5 \leqslant x \leqslant 7 \\ x+4 & \text{αν } 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ x+7 & \text{αν } x \leqslant 1 \end{cases}$$

Συνολοθεωρητικός συμβολισμός:

$$F = \{\langle x, x-5\rangle \mid x > 10\} \cup \{\langle x, z\rangle \mid x \leqslant 10 \wedge \langle x+3, z\rangle \in F\}$$

Εύρεση ελάχιστου σταθερού σημείου του

$$\tau(Y) = \{\langle x, x-5\rangle \mid x > 10\} \cup \{\langle x, z\rangle \mid x \leqslant 10 \wedge \langle x+3, z\rangle \in Y\}$$

Υπολογιστικές Στρατηγικές V

Παρατήρηση: Το τ είναι συνεχές, άρα το θεώρημα σταθερού σημείου δίνει:

$$\begin{aligned}
&\tau^0(\varnothing) = \varnothing\\
&\tau^1(\varnothing) = \tau(\varnothing) = \{\langle x, x-5\rangle \mid x > 10\}\\
&\tau^2(\varnothing) = \tau(\tau(\varnothing) = \tau(\{\langle x, x-5\rangle \mid x > 10\} \cup \{\langle 10, 8\rangle, \langle 9, 7\rangle, \langle 8, 6\rangle\}\\
&\tau^3(\varnothing) = \tau(\tau^2(\varnothing) = \tau(\varnothing) \cup \{\langle 10, 8\rangle, \langle 9, 7\rangle, \langle 8, 6\rangle, \langle 7, 8\rangle, \langle 6, 7\rangle, \langle 6, 7\rangle, \langle 5, 6\rangle\}\\
&\tau^4(\varnothing) = \tau^3(\varnothing) \cup \{\langle 4, 8\rangle, \langle 3, 7\rangle, \langle 2, 6\rangle\}\\
&\tau^5(\varnothing) = \tau^4(\varnothing) \cup \{\langle 1, 8\rangle, \langle 0, 7\rangle\}\\
&\tau^6(\varnothing) = \tau^5(\varnothing)
\end{aligned}$$

και για όλα τα $i \geqslant 5$: $\tau^i(\varnothing) = \tau^5(\varnothing)$, άρα $F = \bigcup_i \tau^i(\varnothing) = \tau^5(\varnothing)$ που δίνει ακριβώς την παραπάνω ορισμένη f^*.

Υπολογιστικές Στρατηγικές VI

Μέχρι στιγμής υποθέσαμε (προσποιηθήκαμε) ότι ασχολούμαστε μόνο με **αυστηρές** (strict) συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις που δεν ορίζονται όταν δεν ορίζονται κάποια από τα ορίσματά τους. Όμως, συναρτήσεις που ορίζονται χρησιμοποιώντας σύνθεση και **if**-**then**-**else** δεν έχουν πλέον αυτή την ιδιότητα! Θέλουμε **if** $x = x$ **then** 5 **else** $y + 3$ να ορίζεται και να είναι ίσο με 5 ακόμα και αν το y δεν ορίζεται.

Για να δώσουμε μία πιο συγκεκριμένη περιγραφή της κατάστασης επεκτείνουμε το βασικό πεδίο $\mathbb{N}$ (φυσικοί) με ένα νέο σύμβολο $\perp$ που συμβολίζει την *μη ορισμένη* "τιμή": $\mathbb{N}^{\perp} = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$. Προφανώς ισχύει: $\perp \sqsubseteq x$, $\forall x \in \mathbb{N}^{\perp}$ (δηλαδή το $\perp$ είναι λιγότερο, ή εξίσου, ορισμένο σε σχέση με οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου μας). Συνεπώς, αντίστοιχα $\perp \sqcup x = x$, $\forall x \in \mathbb{N}^{\perp}$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτή τη γενίκευση του $\sqsubseteq$ και $\sqcup$ σε n-άδες, δηλαδή $\langle x, y, \perp\rangle \sqsubseteq \langle x, y, z\rangle \forall x, y, z \in \mathbb{N}^{\perp}$ και $\{\langle x, y, \perp\rangle\} \sqcup \{\langle x, y, z\rangle\} = \{\langle x, y, z\rangle\}$.

Επιπρόσθετα, έχουμε ακόμα την ακόλουθη ιδιότητα συνέπειας:

$$f(x, \perp) = y \text{ συνεπάγεται } \forall z\colon f(x, z) = y.$$

Υπολογιστικές Στρατηγικές VII

Επιστρέφοντας στο αρχικό παράδειγμα του κεφαλαίου μπορούμε να ξεκαθαρίσουμε τον ορισμό της f_1:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \text{ και } y \text{ είναι διαφορετικά από } \perp \\ \perp, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μπορούμε επίσης να επαληθεύσουμε ότι

$$f^*(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq \perp \\ \perp, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της

$$f(x,y) \ = \ \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } f(x-1, f(x,y)).$$

Υπολογιστικές Στρατηγικές VIII

Συνολοθεωρητικός συμβολισμός:

$$F = \tau(F) = \{\langle 0, y, 1\rangle \mid y \in \mathbb{N}^{\perp}\} \sqcup \{\langle x, y, z\rangle \mid x \neq 0 \ \wedge \ \exists u \langle x, y, u\rangle \in F \ \wedge \ \langle x-1, u, z\rangle \in F\}$$

Για να υπολογίσουμε επαναληπτικά το ελάχιστο σταθερό σημείο πρέπει να ξεκινήσουμε με Ω αντί για $\varnothing$. Ω είναι η "πουθενά ορισμένη" συνάρτηση, δηλαδή $\Omega = \{\langle x, y, \perp\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}^{+}\}$.

$$\begin{aligned}
\tau^0(\Omega) &= \Omega = \{\langle x, y, \perp\rangle\} \\
\tau^1(\Omega) &= \tau(\Omega) = \{\langle 0, y, 1\rangle\} \cup \{\langle x, y, \perp\rangle \mid x \neq 0\} \\
\tau^2(\Omega) &= \tau(\tau(\Omega)) = \{\langle 0, y, 1\rangle, \langle 1, y, 1\rangle\} \cup \{\langle x, y, \perp\rangle \mid x > 1 \vee x = \perp\} \\
\tau^3(\Omega) &= \{\langle 0, y, 1\rangle, \langle 1, y, 1\rangle, \langle 2, y, 1\rangle\} \cup \{\langle x, y, \perp\rangle \mid x > 2 \vee x = \perp\}
\end{aligned}$$

$$F = \bigcup_i \tau_i(\Omega) = \{\langle x, y, 1\rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}^{\perp}\} \cup \{\langle \perp, y, \perp\rangle \mid y \in \mathbb{N}^{\perp}\}$$

Υπολογιστικές Στρατηγικές IX

Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι η f_3 είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο για το αρχικό παράδειγμα του κεφαλαίου.

Συνολοθεωρητικός συμβολισμός:

$$F = \{\langle x, x, x+1\rangle\} \cup \{x, y, z \mid x \neq y \wedge \exists u(\langle x \dot{-} 1, y+1, u\rangle \in F \wedge \langle x, u, z\rangle \in F)\}$$

Θεώρημα Cadiou I

Θεώρημα (Cadiou)

Κάθε υπολογιστική στρατηγική υπολογίζει μία μερική συνάρτηση g που είναι λιγότερο ή εξίσου ορισμένη με το ελάχιστο σταθερό σημείο f^* δηλ. $g \sqsubseteq f^*$.

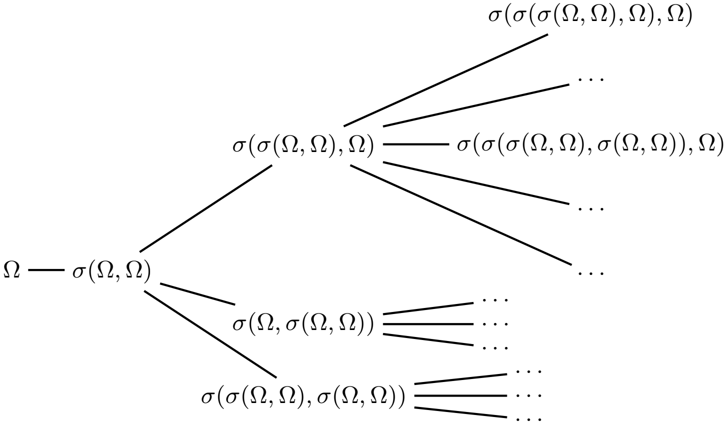
Πόρισμα

Αν κάποιος υπολογισμός σύμφωνος με κάποια υπολογιστική στρατηγική τερματίζει, τότε δίνει πάντοτε την σωστή τιμή της συνάρτησης ελαχίστου σταθερού σημείου f^*.

Ιδέα της απόδειξης:
Συμβολισμός: $\sigma(f, f)$ αντί του $\tau(f)$ για να υποδηλώσουμε ακριβώς δύο εμφανίσεις του f στο τ.

Θεώρημα Cadiou II

Θεωρήσατε το ακόλουθο δέντρο που έχει (ως μονοπάτια) υπολογισμούς όλων των δυνατών στρατηγικών:



Θεώρημα Cadiou III

- Κατά μήκος κάθε μονοπατιού έχουμε μία μη φθίνουσα ακολουθία από συναρτήσεις (όλο και περισσότερο ορισμένες).
- Το χαμηλότερο μονοπάτι αντιστοιχεί στο: $\Omega - \tau(\Omega) - \tau(\tau(\Omega)) - \ldots$ και οδηγεί στο ελάχιστο σταθερό σημείο f^*.
- Σε κάθε επίπεδο του δέντρου όλες οι συναρτήσεις στους κόμβους είναι λιγότερο (ή εξίσου) ορισμένες από την χαμηλότερη.
- Επομένως, το όριο οποιουδήποτε μονοπατιού είναι λιγότερο (ή εξίσου) ορισμένο από το όριο του χαμηλότερου μονοπατιού, που είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο f^*.

$\square$

Θεώρημα Cadiou IV

Παρατηρήσεις:

- Το χαμηλότερο μονοπάτι αντιστοιχεί στην στρατηγική FS.
- Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε μία τεχνική που ονομάζεται "υπολογιστική επαγωγή" (computational induction): αν θέλουμε να αποδείξουμε την ιδιότητα $A(f)$ για μια συνάρτηση f ορισμένη με ένα σχήμα τύπου McCarthy
  1. δείχνουμε $A(\Omega)$
  2. υποθέτοντας $A(g)$, δείχνουμε $A(\tau(g))$
  3. υποθέτοντας $\forall i, A(\tau^i(\Omega))$, δείχνουμε $A(\bigsqcup_i \tau^i(\tau))$
- Η LISP είναι μία γλώσσα προγραμματισμού βασισμένη σε αναδρομές τύπου McCarthy.
- Οι outermost στρατηγικές είναι στρατηγικές σταθερού σημείου (διαισθητικά, διότι το εμφωλιασμένο βάθος των υπαρχουσών εμφανίσεων δεν αυξάνεται). Για αυτό οι LO, PO, FS και FA είναι στρατηγικές σταθερού σημείου, αλλά οι LI, PI δεν είναι (παρότι πιθανώς έχουν λιγότερες αντικαταστάσεις αν τερματίζουν με τη τιμή f^*).

Θεώρημα Cadiou V

- **Κανονική στρατηγική**: μία στρατηγική σταθερού σημείου με ελάχιστο αριθμό αντικαταστάσεων (όχι κατ' ανάγκη ελάχιστο αριθμό βημάτων αντικατάστασης). *Σύνθημα*: "Ποτέ μην κάνεις κάτι σήμερα που μπορείς να αναβάλεις για αύριο" δηλαδή κοίτα μπροστά: Έλεγξε αν μετά από την αντικατάσταση της L.O. εμφάνισης, μπορείς απ' ευθείας να υπολογίσεις την **if**-συνθήκη. Στην περίπτωση που αυτό γίνεται, κάνε αυτή την αντικατάσταση. Στην περίπτωση που δεν γίνεται έλεγξε με τον ίδιο τρόπο την L.O. εμφάνιση στην **if**-συνθήκη που δεν μπορεί να υπολογιστεί απευθείας, κ.τ.λ. (Τελικά θα βρεις μία "καλή" εμφάνιση, που δίνει υπολογίσιμες **if**-συνθήκες.)
  Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} f(x,y) = \; & \textbf{if } x \leqslant 10 \textbf{ then } x+y \\ & \textbf{else } f(x-10, f(x-5, y+1)) + f(f(3, y+2), y+10) \end{aligned}$$

Θεώρημα Cadiou VI

Κανονική στρατηγική:

$$
\begin{aligned}
\underline{f}(12,5) &\vdash \underline{f}(2, f(7,6)) + f(f(3,7),15) \\
&\vdash 2 + \underline{f}(7,6) + f(f(3,7),15) \\
&\vdash 2 + 13 + f(\underline{f}(3,7),15) \\
&\vdash 15 + \underline{f}(10,15) \\
&\vdash 40
\end{aligned}
$$

(σε 5 υπολογιστικά βήματα)