Recursive and Recursively Enumerable sets I

Ορισμός

Το σύνολο A είναι **αναδρομικό** ανν η χαρακτηριστική του συνάρτηση X_A είναι αναδρομική.

Το σύνολο A είναι **αναδρομικά αριθμήσιμο** (recursively enumerable) ανν $A = \emptyset$ ή $A =$ πεδίο τιμών της f ($A = \mathrm{ran}(f)$) για κάποια αναδρομική συνάρτηση f.

Εξηγήσεις:

- Το σύνολο A είναι αναδρομικό (αποκρίσιμο) αν υπάρχει πρόγραμμα που μπορεί να αποφαίνεται για το ερώτημα: "δεδομένου του αριθμού n, είναι το n στοιχείο του συνόλου A;".
- Το σύνολο A είναι αναδρομικά αριθμήσιμο (καταγράψιμο, r.e.) αν υπάρχει πρόγραμμα που (χωρίς είσοδο) δίνει στην έξοδο όλα τα στοιχεία του συνόλου A (σε οποιαδήποτε σειρά).

Recursive and Recursively Enumerable sets II

Παράδειγμα

- Το $K = \{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\}$ δεν είναι αναδρομικό (μη επιλυσιμότητα του προβλήματος τερματισμού).
- Το K είναι r.e. (Μπορούμε να κατασκευάσουμε πρόγραμμα που ξεκινά διαδοχικά και τρέχει παράλληλα με τη μέθοδο "dovetaling" όλα τα προγράμματα **while** και όταν κάποιο από αυτά σταματάει βγάζει στην έξοδο το δείκτη του).
- Το $\overline{K}$ δεν είναι ούτε r.e. (γιατί αν και το K και το $\overline{K}$ ήταν r.e., τότε το K θα ήταν αναδρομικό: λεπτομέριες αργότερα).

Recursive and Recursively Enumerable sets III

Θεώρημα

1. *Το A είναι r.e.*
2. *ανν $A = \mathrm{dom}(f)$ (πεδίο ορισμού), όπου $f \in \mathcal{PR}$*
3. *ανν $A = \mathrm{ran}(f)$, όπου $f \in \mathcal{PR}$*
4. *ανν $A = \varnothing$ ή $A = \mathrm{ran}(f)$, όπου $f \in \mathcal{P}$*
5. *ανν $A = \{x \mid \exists y\, R(x, y)\}$, όπου R αναδρομική*
6. *ανν το A είναι **while**-καταγράψιμο*
7. *ανν το A είναι Turing-καταγράψιμο*
8. *ανν το A είναι (**while**- ή) Turing-αποδεκτό (acceptable), δηλ. μπορεί να αναγνωριστεί από (πρόγραμμα **while** ή από) μηχανή Turing (η μηχανή Turing (πρόγραμμα **while**)) σταματά για κάθε $x \in A$ και δε σταματά για $x \notin A$)*
9. *αν $=$ graph(f), όπου $f \in \mathcal{PR}$*

Recursive and Recursively Enumerable sets IV

Παρατηρήσεις:

- Από το πρώτο *ανν* του θεωρήματος και από μια μηχανιστική απαρίθμηση $\{\varphi_i\}$ όλων των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων μπορούμε να λάβουμε μια μηχανιστική απαρίθμηση $\{W_i\}$ όλων των r.e. συνόλων (= πεδίων ορισμού των $\{\varphi_i\}$).

$$W_i = \{x \mid \varphi_i(x)\downarrow\} = \mathrm{dom}(\varphi_i)$$

- $K = \{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\} = \{x \mid x \in W_x\}$

Recursive and Recursively Enumerable sets V

Θεώρημα

Το A είναι αναδρομικό ανν το A και το $\overline{A}$ είναι r.e..

Απόδειξη.

"$\Rightarrow$" : Έστω A αναδρομικό, δηλαδή υπάρχει πρόγραμμα π που αποφαίνεται για το A. Κατασκευάζουμε πρόγραμμα που εκτελεί το π επανειλημμένα για να αποφανθεί για όλες τις εισόδους: 0, 1, 2, ... Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν να απαριθμηθούν το A και το $\overline{A}$.

"$\Leftarrow$" : Έστω A και $\overline{A}$ r.e., δηλ. υπάρχουν δύο προγράμματα π_1, και π_2 που απαριθμούν (καταγράφουν) το A και το $\overline{A}$ αντιστοίχως. Κατασκευάζουμε πρόγραμμα που ελέγχει αν $n \in A$ τρέχοντας εν παραλλήλω το π_1 και το π_2. Το n θα εμφανιστεί κάποτε είτε στην έξοδο του π_1 είτε στην έξοδο του π_2. Έτσι τότε θα αποφασίσει το πρόγραμμα αν $n \in A$ ή όχι (φυσικά δεν είναι γνωστό πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να απαντηθεί το ερώτημα: "$n \in A$;"). □

Recursive and Recursively Enumerable sets VI

Θεώρημα

Το A είναι αναδρομικό ανν $A = \mathrm{ran}(f)$, όπου f γνησίως αύξουσα αναδρομική συνάρτηση ή το A είναι πεπερασμένο σύνολο.

Απόδειξη:

"$\Leftarrow$" : Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε είναι προφανώς και αναδρομικό. Αν $A = \mathrm{ran}(f)$, όπου f γνησίως αύξουσα, τρέχουμε διαδοχικά προγράμματα $f(0), f(1), \ldots$ μέχρι η $f(k)$ να γίνει μεγαλύτερη ή ίση από την είσοδο μας x. Σε αυτό το σημείο αποφασίζεται αν $x \in A$ ή $x \notin A$.

"$\Rightarrow$" : 'Εστω μη πεπερασμένο αναδρομικό σύνολο A. Αν διατάξουμε τα στοιχεία του A με αύξουσα σειρά, τότε η συνάρτηση $f(x) = a_x$ ($x-$στοιχείο του A) είναι γνησίως αύξουσα και υπολογίζεται από το ακόλουθο πρόγραμμα π (με είσοδο x και έξοδο y):

$z := 0$; $y := 0$;
while $z \leqslant x$ **do**
  if $y \in A$ **then** $z := z + 1$;
  $y := y + 1$
end;
$y := y - 1$

Παρατήρηση: Επειδή το A είναι άπειρο η f είναι ολική.

Recursive and Recursively Enumerable sets VII

Παρατήρηση

Η κλάση των **αναδρομικών σχέσεων** είναι **κλειστή** ως προς:

- όλες τις **λογικές πράξεις** (ένωση, τομή, συμπλήρωμα) και ως προς
- **φραγμένους ποσοδείκτες** (bounded quantification, $\forall\ <, \exists\ <$).

Η κλάση (RE) των **recursively enumerable σχέσεων** είναι **κλειστή** ως προς:

- **ένωση και τομή** και όχι όμως και ως προς συμπλήρωμα.
- **φραγμένο καθολικό ποσοδείκτη** (bounded universal quantification: $\forall\ <$) και **μη φραγμένο υπαρξιακό ποσοδείκτη** (unbounded existential quantification: $\exists$).

Recursive and Recursively Enumerable sets VIII

Ορμώμενοι από τις αναγωγές που κάναμε του HP, για παράδειγμα, σε άλλα προβλήματα, εισάγουμε τώρα την έννοια της *αναγωγιμότητας (reducibility)*.

Ορισμός

$A \leqslant_m B$: (A είναι (πολλά-ένα) αναγώγιμο στο B):
$\exists g \in R\ \forall n : (n \in A \leftrightarrow g(n) \in B)$.
Αν επιπλέον η g είναι 1-1, τότε γράφουμε $A \leqslant_1 B$ (το A είναι ένα προς ένα αναγώγιμο στο B).
Αν η συνάρτηση g είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας μιλάμε για αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου και συμβολίζουμε $A \leqslant_m^p B$ (αναγωγή κατά Karp).

Θεώρημα

α) $\leqslant_m$ *είναι ανακλαστική και μεταβατική.*

β) $A \leqslant_m B \Rightarrow \overline{A} \leqslant_m \overline{B}$

γ) $A \leqslant_m B \wedge B$ *αναδρομικό* $\Rightarrow$ *αναδρομικό*
[ή : $A \leqslant_m B \wedge A$ *μη επιλύσιμο* $\Rightarrow B$ *μη επιλύσιμο*]

δ) $A \leqslant_m B \wedge B$ *r.e.* $\Rightarrow A$ *r.e.*

Recursive and Recursively Enumerable sets IX

Ορισμός

$A \equiv_m B : \ A \leqslant_m B \wedge B \leqslant_m A$

Παρατήρηση

Η $\equiv_m$ είναι σχέση ισοδυναμίας και διαβάζεται "έχουν τον ίδιο *βαθμό (μη) επιλυσιμότητας*" (have the same degree of unsolvability).
Έστω C μια κλάση από σύνολα (π.χ. RE η κλάση των r.e. συνόλων).

Ορισμός

B είναι δύσκολο (hard) στην C ως προς $\leqslant_m$: $\forall A \in C : A \leqslant_m B$

Ορισμός

B είναι πλήρες (complete) στην C ως προς $\leqslant_m$: $B \in C$ και είναι δύσκολο στην C ως προς $\leqslant_m$.

Recursive and Recursively Enumerable sets X

Παρατήρηση:

Π.χ. αν $C = NP$ έχουμε προβλήματα (ή σύνολα) *πλήρη* στην NP (NP είναι η κλάση προβλημάτων υπολογιστών μη ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο) [ως προς αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου].

Η χρησιμότητα της έννοιας του NP-πλήρους προβλήματος φαίνεται και από το εξής: Αν ένα NP-πλήρες πρόβλημα A αποδειχθεί ότι επιλύεται με πολυωνυμικού χρόνου ντετερμινιστικό αλγόριθμο, τότε κάθε NP πρόβλημα θα επιλύεται επίσης με πολυωνυμικό (ντετερμινιστικό) αλγόριθμο, αφού ανάγεται πολυωνυμικά στο A.

Recursive and Recursively Enumerable sets XI

Θεώρημα

α)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Το } B \textit{ είναι πλήρες στην RE} \\ B \leqslant_m C \\ \textit{Το } C \textit{ είναι r.e.} \end{array}\right\} \Rightarrow C \textit{ πλήρες στην RE.}$$

β) *A και B είναι πλήρη στην RE* $\Rightarrow A \equiv_m B$

γ) *Το K είναι πλήρες στην RE.*

Απόδειξη: Άσκηση ...