Μαντεία I

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε προγράμματα ή μηχανές Turing με **μαντεία**.

Επιτρέπουμε στα προγράμματα (ή μηχανές) να εισέρχονται σε κατάσταση ερώτησης (οσοδήποτε συχνά), ενώ υπολογίζουν και να συμβουλεύονται ένα *μαντείο* για το A, δηλαδή μία συσκευή που μπορεί να αποφασίζει την ιδιότητα "στοιχείο του" για το A ($x \in A$ ή όχι;). Αν το μαντείο αποκρίνεται για ένα αναδρομικό σύνολο A, τότε το πρόγραμμα μας (ή TM) υπολογίζει ακριβώς όλες τις υπολογίσιμες συναρτήσεις. Αν όμως το μαντείο αποκρίνεται για άλλα μη επιλύσιμα σύνολα (π.χ. K), τότε το πρόγραμμα μας υπολογίζει συναρτήσεις που είναι *υπολογίσιμες με χρήση μαντείου για το σύνολο A* ή *απλά A-υπολογίσιμες*.

Ορισμός

$\mathcal{PR}^A$ είναι η μικρότερη κλάση συναρτήσεων

1. περιλαμβάνει τις S, P, Z, U_i^n και χ_A
2. είναι κλειστή ως προς σύνθεση, πρωταρχική αναδρομή και μ-σχήμα.

Παρόμοια, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια σε πολλά μαντεία: *(μερική) $\mathcal{C}$-αναδρομική*, όπου $\mathcal{C}$ είναι μία κλάση από συναρτήσεις και/ή σύνολα.

Μαντεία II

Ορισμός

$A \leqslant_T B$ (A ανάγεται κατά Turing στο B):
A είναι B-αναδρομική.

Παρατήρηση: Παρόμοιες ιδιότητες και έννοιες όπως για $\leqslant_m$

- $\leqslant_T$ είναι ανακλαστική και μεταβατική.
- $\equiv_T$: είναι η προκύπτουσα αντίστοιχα σχέση ισοδυναμίας, η Turing ισοδυναμία· Turing βαθμός μη επιλυσιμότητας: $d(A) =$ κλάση ισοδυναμίας του A.
- $d(\emptyset)$: μικρότερος βαθμός, βαθμός των αναδρομικών συνόλων.
- Δεν υπάρχει μεγαλύτερος βαθμός: $\forall A$: $d(A) < d(A^K)$
- $d(K)$ είναι μεγιστικός βαθμός μεταξύ των αναδρομικά αριθμήσιμων συνόλων.
- Υπάρχουν αναδρομικά αριθμήσιμα σύνολα , τέτοια ώστε δεν ισχύει ούτε $A \leqslant_T B$ ούτε $\leqslant_T A$.
- $\leqslant_T$-hard, $\leqslant_T$-complete. ($\leqslant_T$-δύσκολο, $\leqslant_T$-πλήρες.)
- K είναι $\leqslant_T$-complete στο RE (αναδρομικά αριθμήσιμα σύνολα)

Μαντεία III

Ορισμός

Μία σχέση R είναι αριθμητική αν ορίζεται στην αριθμητική (δηλαδή την σχεσιακή δομή: $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}; <; S; +; *; 0 \rangle$.

Θεώρημα (Gödel)

R είναι r.e. (αναδρομικά αριθμήσιμη) $\implies$ R είναι αριθμητική.

Απόδειξη.

Επαγωγή στο $\mathcal{PR}$. □

Η αριθμητική ιεραρχία I

$\Sigma_1^0 = \text{RE} = \{S \mid S(\underline{x}) \leftrightarrow \exists \underline{y}, R(\underline{x}, \underline{y}),\ R$ αναδρομική$\}$

$\Pi_1^0 = \text{co-RE} =$ συμπληρώματα συνόλων του RE $= \{S \mid S(\underline{x}) \leftrightarrow \forall \underline{y} R(\underline{x}, \underline{y}),\ R$ αναδρομική$\}$

και γενικά:

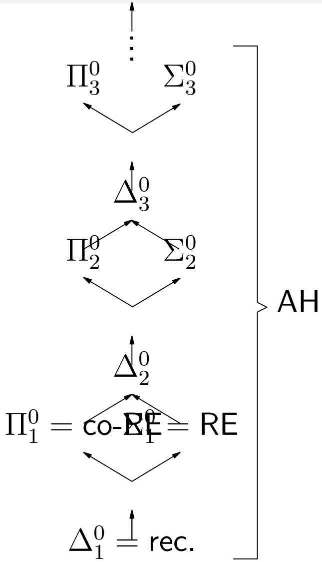
$\Sigma_{n+1}^0 = \Pi_n^0\text{-RE} = \{S \mid S(\underline{x}) \leftrightarrow \exists \underline{y}, R(\underline{x}, \underline{y}), R \in \Pi_n^0\}$

$\Pi_{n+1}^0 = \text{co-}\Sigma_{n+1}^0 =$ συμπληρώματα συνόλων του Σ_{n+1}^0

$\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$

Παράδειγμα: $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \forall x_6 \exists x_7 \forall x_8 \forall x_9 R(\underline{x})$ στο Π_5^0 αν R: αναδρομική.

Η αριθμητική ιεραρχία II



Σχήμα: Η αριθμητική ιεραρχία

Η αριθμητική ιεραρχία III

Θεώρημα

Οι εγκλεισμοί στην αριθμητική ιεραρχία είναι γνήσιοι.

Θεώρημα

Μία σχέση R είναι αριθμητική ανν υπάρχει k τ.ω. $R \in \Sigma_k^0$.