Υπολογισιμότητα

Θεώρημα

Υπάρχουν "υπολογίσιμες" συναρτήσεις που δεν είναι πρωταρχικές αναδρομικές.

Απόδειξη: Διαγωνιοποίηση.

- Μηχανιστική απαρίθμηση πρωταρχικών αναδρομικών συναρτήσεων: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$
- Ορίζουμε: $f(x) = \varphi_x(x) + 1$
  Η f είναι "υπολογίσιμη".
- Έστω ότι η f είναι πρωταρχική αναδρομική, άρα εμφανίζεται στην παραπάνω μηχανιστική απαρίθμηση. Έστω π.χ. ότι ένας δείκτης της f είναι y, δηλαδή $\varphi_y = f$. Εφάρμοσε την f σε όρισμα y:

$$\varphi_y(y) = f(y) = \varphi_y(y) + 1 \qquad \text{Άτοπο}$$

□

Υπολογισιμότητα

Παράδειγμα μιας **ολικής** (ορισμένης για όλους τους φυσικούς αριθμούς) υπολογίσιμης συνάρτησης που όμως δεν είναι πρωταρχική αναδρομική είναι η εξής συνάρτηση f:

$$\begin{cases} f(x,y,0) = Sy \\ f(x,0,1) = x, \quad f(x,0,2) = 0, \quad f(x,0,SSSn) = 1 \\ f(x,Sy,Sn) = f(x, f(x,y,Sn), n) \end{cases}$$

Η παραπάνω συνάρτηση f συγγενεύει με την περίφημη συνάρτηση του Ackermann A:

$$\begin{cases} A(0,n) = n+1 \\ A(m,0) = A(m-1,1) \\ A(m,n) = A(m-1, A(m,n-1)) \end{cases}$$

Ανάγκη να επεκταθούμε απο ολικές σε μερικές συναρτήσεις

Ο τρόπος να αποφύγουμε την αντίφαση ($\varphi_x(x) = \varphi_x(x) + 1$) της διαγωνιοποίησης είναι να επιτρέψουμε **μερικές** (partial) συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις που δεν είναι κατά ανάγκη ορισμένες για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$.

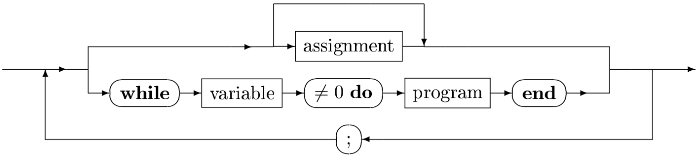
Συνήθως χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς όταν η συνάρτηση f δεν είναι ορισμένη για το όρισμα x:

> *Η f* ***αποκλίνει*** *(diverges) για το x, $f(x)\uparrow$, ή ακόμα το πρόγραμμα για την f δεν σταματάει.*

Τα σχήματα σύνθεσης και πρωταρχικής αναδρομής γενικεύονται κατα προφανή τρόπο.

Προγράμματα WHILE και μερικές αναδρομικές συναρτήσεις I

- Οι assignments ακριβώς ίδιες όπως στη γλώσσα LOOP.
- program:



Προγράμματα WHILE και μερικές αναδρομικές συναρτήσεις II

Όπως είναι γνωστό, είναι δυνατόν η εκτέλεση ενός προγράμματος WHILE να μην σταματάει ποτέ.

Παράδειγμα

Η $\sqrt{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ως μερική συνάρτηση, ορίζεται (σταματάει) μόνο αν το x είναι τέλειο τετράγωνο:
$y := 0$; $z := \mathrm{abs}(x - y^2)$; **while** $z \neq 0$ **do** $y := y + 1$; $z := \mathrm{abs}(x - y^2)$ **end**

Σημασιολογία για προγράμματα WHILE και ακολούθως η έννοια της WHILE-υπολογίσιμης συνάρτησης μπορούν να οριστούν με παρόμοιο τρόπο, όπως και για τα LOOP-προγράμματα. Η κλάση των WHILE-υπολογίσιμων συναρτήσεων συμπεριλαμβάνει και όλες τις LOOP-υπολογίσιμες συναρτήσεις.

μ-σχήμα

Θα εισαγάγουμε τώρα ένα νέο σχήμα, το **μ-σχήμα** ή σχήμα **απεριόριστης ελαχιστοποίησης** (unbounded minimization).

Παράδειγμα

$\sqrt{x} = \mu y[\text{abs}(x - y^2) = 0]$, δηλαδή το μικρότερο y, ώστε $\text{abs}(x - y^2) = 0$, αν υπάρχει τέτοιο y, ειδάλλως η τιμή δεν είναι ορισμένη.

$$\textit{Γενικώς: } f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[h(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Η f μπορεί να μην είναι ορισμένη για δύο λόγους: είτε η h δεν είναι ποτέ $= 0$, είτε η h δεν είναι κάπου ορισμένη πριν να βρεθεί ένα y για το οποίο $h = 0$.

Μερικές αναδρομικές συναρτήσεις

Ορισμός

Η κλάση $\mathcal{PR}$ των **μερικών αναδρομικών συναρτήσεων** (partial recursive functions) είναι η μικρότερη κλάση που:

α) περιλαμβάνει τις **αρχικές συναρτήσεις**: S, P, Z, U_i^n

β) είναι κλειστή ως προς τη **σύνθεση**, την **πρωταρχική αναδρομή** και το μ-**σχήμα**.

Μερικές αναδρομικές συναρτήσεις I

Θεώρημα

Μια μερική συνάρτηση είναι WHILE-υπολογίσιμη ανν είναι μερική αναδρομική.

Απόδειξη (σκελετός):
Με επαγωγή, παρομοίως με τις προηγούμενες αποδείξεις της ισοδυναμίας των LOOP-υπολογίσιμων και των πρωταρχικών αναδρομικών συναρτήσεων.

Πρόσθετες ιδέες:

$\Leftarrow$: $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu z[h(x_1, \ldots, x_n, z) = 0]$
μπορεί να υπολογιστεί με το πρόγραμμα: $z := 0$; "$y := h(x_1, \ldots, x_n, z)$"; **while** $y \neq 0$ **do** $z := \mathrm{succ}\, z$; "$y := h(x_1, \ldots, x_n, z)$" **end**

Μερικές αναδρομικές συναρτήσεις II

$\Rightarrow$: **while** $x_k \neq 0$ **do** π **end**
υπολογίζει την $f_i(x_1, \ldots, x_n, v(x_1, \ldots, x_n))$ [σύνθεση], όπου για $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n, 0) = U_i^n(x_1, \ldots, x_n) [\text{αμοιβαία πρωταρχική αναδρομή}] \\ f_i(x_1, \ldots, x_n, Sz) = h_i(f_1(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, z)) \end{cases}$$

[z = αριθμός επαναλήψεων βρόχου]

και $v(x_1, \ldots, x_n) = \mu z[f_k(x_1, \ldots, x_n, z) = 0]$

Αναδρομικές Συναρτήσεις και Σχέσεις Ι

Ορισμός

Η ολική συνάρτηση $h(\vec{x}, y)$ είναι **κανονική** (regular):

$$\forall \vec{x} \, \exists y \, h(\vec{x}, y) = 0$$

Παρατήρηση

Η $f(\vec{x}) = \mu y[h(\vec{x}, y) = 0]$ είναι ορισμένη για κάθε $\vec{x}$ για μια κανονική συνάρτηση h.

Ορισμός

$\mathcal{R}$: η μικρότερη κλάση συναρτήσεων που

α) περιλαμβάνει τις S, P, Z, U_i^n, και

β) είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση, την πρωταρχική αναδρομή και το μ-σχήμα (εφαρμοζόμενο μόνο) σε κανονικές συναρτήσεις.

Αναδρομικές Συναρτήσεις και Σχέσεις II

Θεώρημα

Η $\mathcal{R}$ περιλαμβάνει ακριβώς εκείνες τις συναρτήσεις της $\mathcal{PR}$ που είναι ολικές.

Απόδειξη.

Έπεται από το **Θεώρημα Κανονικής Μορφής Kleene** (Kleene Normal Form Theorem) □

Ορισμός

Μια **σχέση** (ή ένα **σύνολο**) είναι **αναδρομική** αν η χαρακτηριστική της (ή του) συνάρτηση είναι (ολική) αναδρομική.