Μηχανές Turing (T.M) I

Οι βασικές λειτουργίες μιας **TM** είναι:

- Διάβασε το περιεχόμενο του τρέχοντος κυττάρου
- Γράψε 1 ή 0 στο τρέχον κύτταρο
- Κάνε τρέχον το αμέσως αριστερότερο ή το αμέσως δεξιότερο κύτταρο

Η TM έχει ένα πεπερασμένο αριθμό εσωτερικών **καταστάσεων (internal states)**:

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots\}$$

Πρόγραμμα μιας TM: είναι ένα σύνολο από **τετράδες** της μορφής $\langle q_i, e, d, q_j \rangle$ όπου $q_i, q_j \in Q, e \in \Sigma$, $d \in A = \Sigma \bigcup \{L, R\}$ με τον εξής συναρτησιακό (ντετερμινιστικό) περιορισμό: Για κάθε $\langle q_i, e \rangle$ υπάρχει το πολύ ένα $\langle d, q_j \rangle$ έτσι ώστε η τετράδα $\langle q_i, e, d, q_j \rangle$ να ανήκει στο πρόγραμμα, δηλαδή πρόκειται για μια **συνάρτηση μετάβασης** (*transition function*) $\delta : Q \times \Sigma \to A \times Q$.

Παραδείγματα TM I

Παράδειγμα:

$\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$
Πρόγραμμα: $\{\langle q_0, 1, 0, q_1\rangle, \langle q_1, 0, R, q_0\rangle\}$
Είσοδος: πεπερασμένος αριθμός συνεχόμενων "1", όλα τα υπόλοιπα κύτταρα περιέχουν "0".
Αρχική κατάσταση: q_0
Αρχική θέση κεφαλής (τρέχον κύτταρο): το αριστερότερο "1"

Παραδείγματα TM II

Παράδειγμα υπολογιστικής ακολουθίας, δηλαδή νόμιμης ακολουθίας από στιγμιότυπα:

$$\ldots\ 0\ 0\ \underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{1}\ 1\ 1\ 0\ 0$$

$$\ldots\ 0\ 0\ \underset{\substack{\uparrow\\ q_1}}{0}\ 1\ 1\ 0\ 0$$

$$\ldots\ 0\ 0\ 0\ \underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{1}\ 1\ 0\ 0$$

$$\ldots\ 0\ 0\ 0\ q_1\ 0\ 1\ 0\ 0$$

$$\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ q_0\ 1\ 0\ 0$$

$$\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ q_1\ 0\ 0\ 0$$

$$\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ q_0\ 0\ 0\ 0 \qquad \textit{halt}$$

Παραδείγματα TM III

Σε κάθε TM μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια μερική συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$. Η είσοδος $n \in \mathbb{N}$ παριστάνεται με $\underline{n+1}$ συνεχόμενα 1 (έτσι ο αριθμός 0 παριστάνεται με 1). Σαν αρχικό στιγμιότυπο έχουμε την κεφαλή (τρέχον κύτταρο) να δείχνει στο αριστερότερο 1 και να βρίσκεται στην κατάσταση q_0. Σαν έξοδο λαμβάνουμε το συνολικό αριθμό από 1 που βρίσκεται στην ταινία, όταν και εάν η μηχανή σταματήσει.

Παραδείγματα TM IV

Παράδειγμα

Να κατασκευαστεί μια TM που υπολογίζει το $2 * x$.

Ιδέα: $\ldots \quad 0 \quad 0 \quad \cancel{1} \quad \cancel{1} \quad 1 \quad 1 \quad 0$

$\uparrow \qquad\qquad 1 \quad 1$

Η TM θα εργάζεται σύμφωνα με το παρακάτω πρόγραμμα (το οποίο γράφεται πάντα πρώτα σε άτυπη γλώσσα υψηλού επιπέδου):

αρχικοποίηση; (διαγραφή του πρώτου 1)
while *είσοδος<>0* **do**
  διάγραψε ένα 1 από είσοδο;
  μετακίνησε κεφαλή δεξιά πέρα από είσοδο και έξοδο;
  πρόσθεσε δύο 1 στην έξοδο;
  μετακίνησε κεφαλή αριστερά πέρα από έξοδο και είσοδο
end

Παραδείγματα TM V

$$
\begin{array}{llll}
< q_0 & 1 & 0 & q_1 > \\
< q_1 & 0 & \mathsf{R} & q_2 > \\
< q_2 & 1 & 0 & q_3 > \mid \text{halt για} < q_2 \;\; 0 > \\
< q_3 & 0 & \mathsf{R} & q_4 > \\
< q_4 & 1 & \mathsf{R} & q_4 > \\
< q_4 & 0 & \mathsf{R} & q_5 > \\
< q_5 & 1 & \mathsf{R} & q_5 > \\
< q_5 & 0 & 1 & q_6 > \\
< q_6 & 1 & \mathsf{R} & q_6 > \\
< q_6 & 0 & 1 & q_7 > \\
< q_7 & 1 & \mathsf{L} & q_7 > \\
< q_7 & 0 & \mathsf{L} & q_8 > \\
< q_8 & 1 & \mathsf{L} & q_8 > \\
< q_8 & 0 & \mathsf{R} & q_2 >
\end{array}
$$

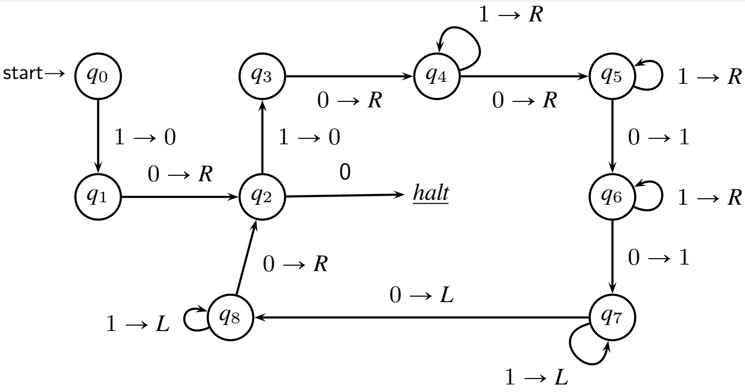
Πίνακας: Πρόγραμμα TM παραδείγματος σε μορφή τετράδων

Παραδείγματα TM VI

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
0		R/q_2		R/q_4	R/q_5	$1/q_6$	$1/q_7$	L/q_8	R/q_2
1	$0/q_1$		$0/q_3$		R/q_4	R/q_5	R/q_6	L/q_7	L/q_8

Πίνακας: TM σε μορφή πίνακα

Παραδείγματα TM VII



Σχήμα: TM σε μορφή διαγράμματος καταστάσεων

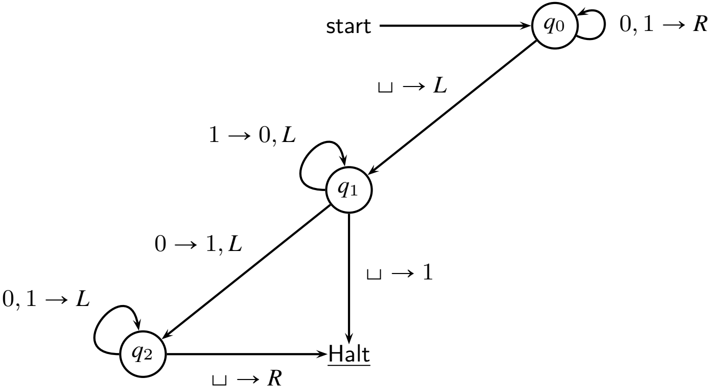
Παραδείγματα TM I

Στο επόμενο παράδειγμα το αλφάβητο είναι $\Sigma = \{0, 1, \sqcup\}$.
Η είσοδος και η έξοδος κωδικοποιούνται στο **δυαδικό σύστημα**.
Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί μια TM που υπολογίζει το $x + 1$.

Η TM θα εργάζεται σύμφωνα με το παρακάτω πρόγραμμα:

Κάνε τρέχον το κύτταρο με τελευταίο σύμβολο της εισόδου x;
repeat
  Αν τρέχον κύτταρο έχει $\sqcup$, γράψε 1 και σταμάτα;
  Αν τρέχον κύτταρο έχει 1, γράψε 0, κάνε τρέχον το αμέσως αριστερότερο κύτταρο, και κρατούμενο := 1;
  Αν τρέχον κύτταρο έχει 0, γράψε 1, κάνε τρέχον το αμέσως αριστερότερο κύτταρο, και κρατούμενο := 0;
until *κρατούμενο = 0;*
Κάνε τρέχον το κύτταρο με πρώτο σύμβολο του $x + 1$ και σταμάτα;

Παραδείγματα TM II



Σχήμα: TM σε μορφή διαγράμματος καταστάσεων

Παραδείγματα TM III

Παράδειγμα λειτουργίας με είσοδο $x = 1011$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(q_0, \underline{1}011) & \vdash & (q_0, 1\underline{0}11) & \vdash & (q_0, 10\underline{1}1) & \vdash & (q_0, 101\underline{1}) & \vdash \\
(q_0, 1011\underline{\sqcup}) & \vdash & (q_1, 101\underline{1}) & \vdash & (q_1, 10\underline{1}0) & \vdash & (q_1, 1\underline{0}00) & \vdash \\
(q_2, \underline{1}100) & \vdash & (q_2, \underline{\sqcup}1100) & \vdash & (\mathsf{HALT}, \underline{1}100) & & &
\end{array}
$$

Παραδείγματα TM IV

$< q_0$	0	q_0	0	R $>$
$< q_0$	1	q_0	1	R $>$
$< q_0$	$\sqcup$	q_1	$\sqcup$	L $>$
$< q_1$	0	q_2	1	L $>$
$< q_1$	1	q_1	0	L $>$
$< q_1$	$\sqcup$	Halt	1	S $>$
$< q_2$	0	q_2	0	L $>$
$< q_2$	1	q_2	1	L $>$
$< q_2$	$\sqcup$	Halt	$\sqcup$	R $>$

Πίνακας: Πρόγραμμα TM

	0	1	$\sqcup$
q_0	(q_0, 0, R)	(q_0, 1, R)	(q_1, $\sqcup$, L)
q_1	(q_2, 1, L)	(q_1, 0, L)	(Halt, 1, S)
q_2	(q_2, 0, L)	(q_2, 1, L)	(Halt, $\sqcup$, R)

Πίνακας: TM σε μορφή πίνακα

Αντιστοιχία προγραμμάτων WHILE και TM

WHILE - πρόγραμμα	αντίστοιχη TM
succ(x)	κενή TM
pred(x)	$\{q_0 1 0 q_1,\ q_1 0 R q_2,\ q_2 1 0 q_2\}$
zero(x)	$\{q_0 1 0 q_1,\ q_1 0 R q_0\}$
;	"ένωση" των δύο TM μέ αναπροσαρμογή των ονομάτων των καταστάσεων ώστε να είναι διαφορετικές και αναπροσαρμογή της παρα-στασης εξόδου της πρώτης TM που θα χρη-σημοποιηθεί ώς είσοδος για τη δέυτερη TM.
while	παρόμοια (βλ. επίσης το παράδειγμα παραπάνω)

Ντετερμινισμός και μη I

Ντετερμινιστική μηχανή Turing (DTM):
$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times A$, όπου $A = \Sigma \cup \{L, R\}$

Μη-Ντετερμινιστική μηχανή Turing (NTM):
$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathrm{Pow}(Q \times A)$, όπου $A = \Sigma \cup \{L, R\}$

Η τριάδα που αποτελείται από τα **περιεχόμενα** της ταινίας της TM, την **θέση της κεφαλής** πάνω στην ταινία και την **τρέχουσα κατάσταση** της TM ονομάζεται **configuration** (στιγμιαία περιγραφή) της TM.

Ντετερμινισμός και μη II

- Σε μία **DTM** ο υπολογισμός είναι μία **γραμμική ακολουθία από configurations** (σε κάθε βήμα υπάρχει ακριβώς **μία** επόμενη νόμιμη configuration).
- Σε μία **NTM**, όμως, ο υπολογισμός περιγράφεται με ένα **δένδρο από configurations**, αφού σε κάθε βήμα είναι δυνατό να προκύψουν περισσότερες από μία επόμενες νόμιμες configurations.

Θα λέμε ότι μία συμβολοσειρά γίνεται **αποδεκτή** από μία NTM, αν γίνεται αποδεκτή **τουλάχιστον από ένα** υπολογιστικό μονοπάτι του δένδρου.

Θεώρημα

Για κάθε μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing (NTM) υπάρχει ***ισοδύναμη*** *ντετερμινιστική μηχανή Turing (DTM).*

Παραλλαγές TM

Παραλλαγές Μηχανών Turing που έχουν την ίδια υπολογιστική δυνατότητα, όχι όμως και αποδοτικότητα (*efficiency*) είναι:

- πολλές ταινίες, μνήμη πλέγματος (grid memory), μνήμη περισσοτέρων διαστάσεων
- μεγαλύτερο Σ
- πολλές παράλληλες κεφαλές
- μη ντετερμινιστικές μεταβάσεις
- μίας κατευθύνσεως, απείρου μήκους ταινία
- εγγραφή και κίνηση της κεφαλής σε κάθε βήμα

Υπολογιστικά Μοντέλα I

Μερικά υπολογιστικά μοντέλα είναι τα εξής:

- προγράμματα Pascal
- προγράμματα Pascal χωρίς αναδρομή (αφαίρεση αναδρομής με χρήση στοίβας)
- προγράμματα Pascal χωρίς αναδρομή και χωρίς άλλους τύπους δεδομένων εκτός από τους φυσικούς αριθμούς (επιτυγχάνεται με κωδικοποιήσεις)
- προγράμματα WHILE (μόνη δομή ελέγχου το WHILE)
- προγράμματα GOTO και IF
- Assembler-like RAM (random access machine), URM (universal register machine)
- SRM (single register machine) ένας καταχωρητής
- Μηχανή Turing (πρόσβαση μόνο σε μια κυψέλη "cell" της ταινίας κάθε φορά)
- παραλλαγές από μηχανές Turing
- Thue: κανόνες επανεγγραφής (re-writing rules)
- Post: κανονικά συστήματα (normal systems)
- Church: λογισμός λ (λ-calculus)

Υπολογιστικά Μοντέλα II

- Curry: συνδυαστική λογική (combinatory logic)
- Markov: Μ. αλγόριθμοι
- Kleene: γενικά αναδρομικά σχήματα (general recursive schemes)
- Shepherdson-Sturgis, Elgott: URM, SRM, RAM, RASP
- Σχήματα McCarthy (if ... then ... else ... $\Rightarrow$ LISP)

Υπολογιστικά Μοντέλα III

Τα χαρακτηριστικά των παραπάνω μοντέλων είναι:

- ντετερμινιστική πολυπλοκότητα σε διακριτά βήματα
- πεπερασμένο σύνολο εντολών που εκτελούνται από επεξεργαστή
- απεριόριστη μνήμη

Θεώρημα

f είναι TM υπολογίσιμη ανν

- *f είναι WHILE-υπολογίσιμη*
- *f είναι GOTO-υπολογίσιμη*
- *f είναι PASCAL-υπολογίσιμη*
- *f είναι μερικά αναδρομική (partial recursive)*