Μας δίνεται ένα σύνολο μεταβλητών $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ και ένα σύνολο από clauses $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Θα κατασκευάσουμε 3 ξένα μεταξύ τους σύνολα W, X, Y με $|W| = |X| = |Y|$ και ένα σύνολο $M \subseteq W \times X \times Y$ έτσι ώστε το M να έχει matching αν και μόνο αν η φόρμουλα Φ: $c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ είναι ικανοποιήσιμη. Η κατασκευή γίνεται ως εξής:

Βάζουμε στο W όλα τα στοιχεία $u_i[j], \neg u_i[j], 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$ ($2mn$ το πλήθος). Στο σύνολο X βάζουμε τα στοιχεία:

- $a_i[j], 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n$, ($nm$ το πλήθος, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο truthsetting)
- $S_1[j], 1 \leq j \leq m$, (m το πλήθος, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο satisfaction)
- $g_1[k], 1 \leq k \leq (n-1)m$ ($(n-1)m$ το πλήθος, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο garbage collection).

Όμοια με το σύνολο X φτιάχνουμε και το σύνολο Y βάζοντας τα στοιχεία:

- $b_i[j], 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n.$
- $S_2[j], 1 \leq j \leq m.$
- $g_2[k], 1 \leq k \leq (n-1)m.$

Το σύνολο $M \subseteq W \times X \times Y$ το κατασκευάζουμε ως εξής: Για κάθε μεταβλητή u_i βάζουμε στο M τα σύνολα τριάδων T_i^t και T_i^f όπου:

$$T_i^t = \{(\neg u_i[j], a_i[j], b_i[j]), 1 \leq j \leq m\}$$
$$T_i^f = \{(u_i[j], a_i[j+1], b_i[j]), 1 \leq j \leq m\} \cup \{(u_i[m], a_i[1], b_i[m])\}$$

Όλες αυτές οι τριάδες είναι $2nm$ στο πλήθος και χρησιμοποιούνται για το truthsetting. Για κάθε clause c_j βάζουμε στο M το σύνολο τριάδων C_j όπου:

$$C_j = \{(u_i[j], s_1[j], s_2[j]) \mid u_i \in c_j \text{ clause}\} \cup \\ \{(\neg u_i[j], s_1[j], s_2[j]) \mid \neg u_i \in c_j \text{ clause}\}, 1 \leq j \leq m\}$$

Συνολικά είναι $3m$ τριάδες και χρησιμοποιούνται για το satisfaction.

Τέλος βάζουμε στο M τα στοιχεία που λείπουν για να ανήκει το στιγμιότυπό μας στο πρόβλημα 3DM (garbage collection). Βάζουμε δηλαδή το σύνολο τριάδων G όπου:

$$G = \{(u_i[j], g_1[k], g_2[k]),\ (\neg u_i[j], g_1[k], g_2[k])\}, \\ 1 \leq k \leq m(n-1),\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

Δηλαδή το G αποτελείται συνολικά από $2nm^2(n-1)$ στοιχεία.

Ένα οποιοδήποτε matching $M' \subseteq M$ θα πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον nm τριάδες από τα T_i^f, T_i^t ώστε να καλύψουμε όλα τα $a_i[j]$ και $b_i[j]$, τα οποία εμφανίζονται μόνο σε τριάδες στα T_i^f, T_i^t. Επίσης, επειδή υπάρχουν ακριβώς mn διαφορετικά $a_i[j]$ προκύπτει ότι το M' περιλαμβάνει ακριβώς mn τριάδες από τα T_i^f, T_i^t. Μάλιστα το M' θα περιλαμβάνει για κάθε u_i, είτε ολόκληρο το T_i^f είτε ολόκληρο το T_i^t. Επίσης το matching M' προτείνει μια απονομή αλήθειας που ικανοποιεί τη φόρμουλα Φ:

$$t(u_i) = \begin{cases} \text{True}, & T_i^t \subseteq M' \\ \text{False}, & T_i^f \subseteq M' \end{cases}$$

Ένα οποιοδήποτε matching M' θα πρέπει να περιέχει για κάθε clause μία ακριβώς τριάδα (σύνολο m τριάδες). Το literal $u_i[j]$ (ή $\neg u_i[j]$) που θα εμφανίζεται στην τριάδα C_j στο matching M' θα είναι ακριβώς εκείνο που ικανοποιεί το clause c_j, αφού για να υπάρχει στο M', σημαίνει ότι $T_i^t \subseteq M'(T_i^f \subseteq M')$.

Το matching M' έχει ως τώρα $nm + m$ τριάδες και συνεπώς του λείπουν $2mn - nm - m = m(n-1)$ τριάδες. Αυτές θα μπορεί πάντα να τις πάρει από το G, αφού θα υπάρχουν $m(n-1)$ literals που δεν έχει ως τώρα το M'. Η κατασκευή έχει τελειώσει και συνολικά το πλήθος των τριάδων που περιέχει το M είναι $|M| = 2nm + 3m + 2m^2n(n-1)$. Συνεπώς και εφόσον ο τρόπος κατασκευής του από το 3SAT είναι σχεδόν άμεσος, το M μπορεί να κατασκευαστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ήδη αποδείξαμε πως αν το M περιέχει ένα matching, τότε η φόρμουλα Φ είναι ικανοποιήσιμη. Αν η φόρμουλα Φ είναι ικανοποιήσιμη, τότε θα κατασκευάσουμε ένα matching M' ως εξής:

- Διαλέγουμε όλα τα σύνολα T_i^t για τα οποία $t(u_i) = True$ και όλα τα σύνολα T_i^f για τα οποία $t(u_i) = False$. Δηλαδή, όλα τα literals που θα ανήκουν σ' αυτές τις τριάδες θα έχουν τιμή False και θα είναι ακριβώς mn.

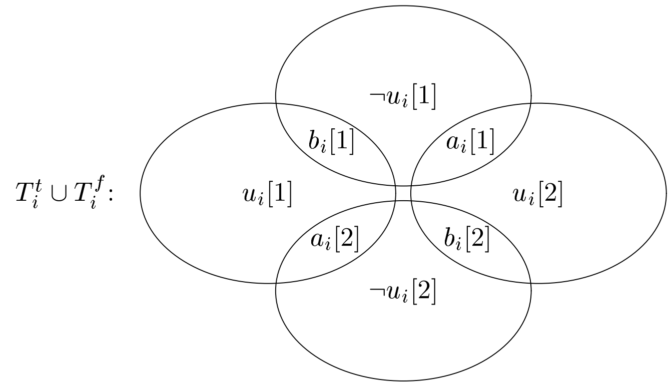
- Επίσης διαλέγουμε m τριάδες της μορφής

$$(u_i[j], s_1[j], s_2[j]) \text{ ή } (\neg u_i[j], s_1[j], s_2[j])$$

  οι οποίες προφανώς θα περιέχουν literals με τιμή True (ειδάλλως θα καταστρέφεται το matching). Θα υπάρχουν πάντα m τέτοιες τριάδες, αφού κάθε clause θα έχει ένα literal που το ικανοποιεί.

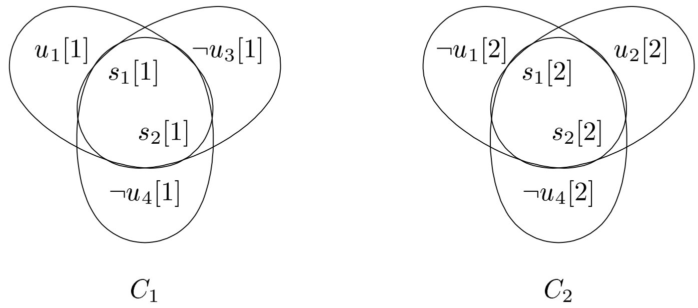
- Τέλος παίρνουμε ένα σύνολο $G' \subseteq G$ με $m(n-1)$ τριάδες οι οποίες θα περιέχουν literals με τιμή True. Ξέρουμε ότι υπάρχουν $m(n-1)$ τέτοιες τριάδες αφού έχουμε πάρει μόνο m με literals που έχουν τιμή True ως τώρα. Συνεπώς το M' περιέχει $2nm$ διαφορετικές τριάδες και άρα είναι ένα ταίριασμα του M.

□



Σχήμα 12.6: Αναγωγή του 3SAT στο 3DM: Truthsetting

Παράδειγμα 12.6.2. Έχουμε τη φόρμουλα Φ: $(u_1 \vee \neg u_3 \vee \neg u_4) \wedge (\neg u_1 \vee u_2 \vee \neg u_4)$ η οποία είναι ικανοποιήσιμη. Μία απονομή αλήθειας που την ικανοποιεί είναι η $t(u_1, u_2, u_3, u_4) = (T, T, F, T)$. Για κάθε μεταβλητή u_i, το M θα περιλαμβάνει το σύνολο που φαίνεται στο σχήμα 12.6. Επίσης το M θα περιλαμβάνει τα σύνολα C_1 και C_2 που φαίνονται στο σχήμα 12.7. Τέλος το M θα περιλαμβάνει το σύνολο G με τα στοιχεία που απομένουν. Ένα matching



Σχήμα 12.7: Αναγωγή του 3SAT στο 3DM: Satisfaction

$M' \subseteq M$ που προκύπτει από την απονομή (T, T, F, T) είναι το εξής:

$$\begin{aligned} M' \;=\; & \{\neg u_1[1], a_1[1], b_1[1]), \\ & (\neg u_1[2], a_1[2], b_1[2]), \\ & (\neg u_2[1], a_2[1], b_2[1]), \\ & (\neg u_2[2], a_2[2], b_2[2]), \\ & (u_3[1], a_3[1], b_3[1]), \\ & (u_3[2], a_3[2], b_3[2]), \\ & (\neg u_4[1], a_4[1], b_4[1]), \\ & (\neg u_4[2], a_4[2], b_4[2])\} \bigcup T' \bigcup G' \end{aligned}$$

όπου

$$T' = \{(u_1[1], s_1[1], s_2[1]), (u_2[2], s_1[2], s_2[2])\}$$

και

$$\begin{aligned} G' = \; & \{(u_1[2], g_1[1], g_2[1]), (u_2[1], g_1[2], g_2[2]), \\ & (\neg u_3[1], g_1[3], g_2[3]), (\neg u_3[2], g_1[4], g_2[4]), \\ & (u_4[1], g_1[5], g_2[5]), (u_4[2], g_1[6], g_2[6])\} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 12.6.3. Το πρόβλημα 2-DIMENSIONAL MATCHING ανήκει στο P. Δηλαδή, όταν έχουμε 2 σύνολα n στοιχείων και θέλουμε να βρούμε ένα ταίριασμα, μπορούμε να το κάνουμε σε πολυωνυμικό χρόνο με έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Το πρόβλημα $2DM$ αναφέρεται και σαν πρόβλημα γάμου (**marriage problem**) λόγω των προφανών προεκτάσεων που μπορεί να έχει στη ζωή (το ένα σύνολο περιέχει n άντρες και το άλλο n γυναίκες). Επίσης, άλλα παρόμοια προβλήματα είναι τα εξής:

- Μπορούν να τοποθετηθούν 8 βασίλισσες (queens) σε μια σκακιέρα (8×8) έτσι ώστε καμιά βασίλισσα να μην απειλεί κάποια άλλη;
- Μπορούν να τοποθετηθούν 8 πύργοι σε μια σκακιέρα (8×8) έτσι ώστε κανένας πύργος να μην απειλεί κάποιον άλλο; (εύκολο)
- Μπορούν να τοποθετηθούν 8 πύργοι όπως και πριν, σε ένα δεδομένο υποσύνολο της σκακιέρας; (δύσκολο, αλλά στο P: είναι το πρόβλημα γάμου)

12.7 Η αναγωγή του 3SAT στο GRAPH 3-COLORABILITY

Θεώρημα 12.7.1. *Το πρόβλημα GRAPH 3-COLORABILITY είναι NP-complete.*

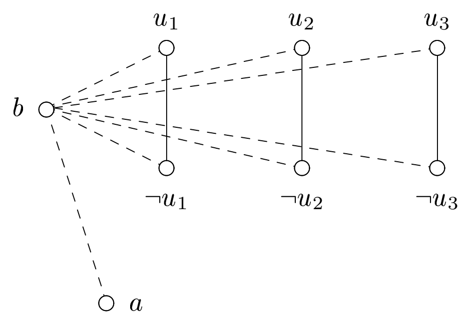
Proof. Το GRAPH 3-COLORABILITY ανήκει στο NP, αφού ένας μη-ντετερμινιστικός αλγόριθμος μπορεί να ελέγξει σε πολυωνυμικό χρόνο, αν η f που μάντεψε (η απονομή των χρωμάτων στους κόμβους δηλαδή), ικανοποιεί τη συνθήκη $f(u) \neq f(v), \forall (u,v) \in E$.

Θα δείξουμε ότι το GRAPH 3-COLORABILITY είναι NP-complete ανάγοντας το 3SAT σ' αυτό ($3SAT \leq_m^p GRAPH3 - COLORABILITY$).

Μας δίνεται ένα σύνολο μεταβλητών $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ και ένα σύνολο από clauses $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$.

Θα κατασκευάσουμε έναν γράφο $G(V,E)$ έτσι ώστε η φόρμουλα Φ: $(c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m)$ να είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν ο γράφος G βάφεται με 3 χρώματα. Η κατασκευή του G γίνεται ως εξής:

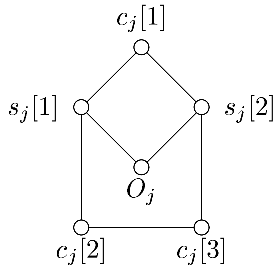
- Για κάθε μεταβλητή $u_i \in U$ βάζουμε στο V τους κόμβους $u_i, \neg u_i$ και στο E τις πλευρές $(u_i, \neg u_i)$. Επίσης βάζουμε στο V τους κόμβους a, b και στο E τις πλευρές $(a,b), (u_i,b), (\neg u_i, b)$. Δηλαδή ως τώρα $|V| = 2n+2, |E| = 3n+1$. Ο γράφος G παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 12.8. Αυτό είναι το στάδιο truthsetting.



Σχήμα 12.8: Αναγωγή του 3SAT στο 3-Colorability: Truthsetting

- Για κάθε clause c_j προσθέτουμε στο γράφο G, έναν υπογράφο σαν αυτόν που φαίνεται στο σχήμα 12.9. Επίσης βάζουμε στο E τις πλευρές $(c_j[k], u_i)$ ή $(c_j[k], \neg u_i)$ ανάλογα με το αν το k-οστό literal του c_j είναι το u_i ή $\neg u_i$ αντίστοιχα. Δηλαδή έχουμε $6m$ καινούργιους κόμβους για το V και $10m$ καινούριες πλευρές για το E. Αυτό είναι το στάδιο satisfaction.

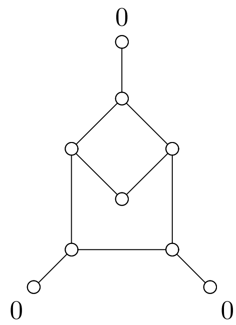
- Τέλος κάνουμε τις συνδέσεις που απομένουν (remaining interconnections) για να είναι το πρόβλημά μας, του σωστού τύπου. Προσθέτουμε, δηλαδή, τις πλευρές (O_j, b) και τις πλευρές (O_j, a) ($2m$ στο πλήθος). Η κατασκευή μας έχει τελειώσει.



Σχήμα 12.9: Αναγωγή του 3SAT στο 3 Colorability: Satisfaction

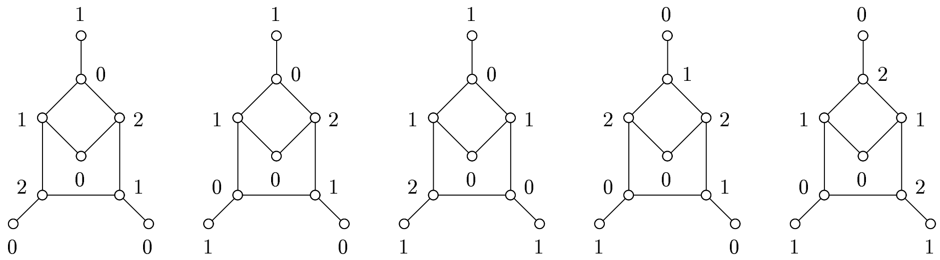
Έχουμε συνολικά $|V| = 2n + 6m + 2, |E| = 3n + 12m + 1$ συνεπώς ο μετασχηματισμός γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος της φόρμουλας Φ. Μένει, λοιπόν να δείξουμε ότι η Φ είναι ικανοποιήσιμη τότε και μόνο τότε, όταν ο $G(V, E)$ βάφεται με 3 χρώματα. Έστω ότι η Φ ικανοποιείται. Βάφουμε τον κόμβο b με το χρώμα 2 και τον κόμβο a με το χρώμα 1. Συνεπώς, όλες οι κορυφές O_j πρέπει να βαφούν με το χρώμα 0. Επίσης βάφουμε τους κόμβους $u_i, \neg u_i$ ως εξής:

$$f(u_i) = \begin{cases} 1, & t(u_i) = True \\ 0, & t(u_i) = False \end{cases} \quad \text{και} \quad f(\neg u_i) = \begin{cases} 0, & t(u_i) = True \\ 1, & t(u_i) = False \end{cases}$$



Σχήμα 12.10: Υπογράφος μη ικανοποιήσιμης clause

Δηλαδή, όλα τα literals που γίνονται True με την απονομή που ικανοποιεί την Φ τα βάφουμε με το χρώμα 1 και όλα τα literals που γίνονται False τα βάφουμε με το χρώμα 0. Απομένει να βάψουμε τους υπογράφους που αντιστοιχούν στα clauses. Επειδή η φόρμουλα Φ ικανοποιείται σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος u_i ή $\neg u_i$ γειτονικός ενός κόμβου $c_j[k]$, ο οποίος έχει βαφεί με το χρώμα 1. Είναι ο κόμβος που αντιστοιχεί στο literal το οποίο ικανοποιεί το clause c_j. Συνεπώς δε μπορεί να υπάρχει υπογράφος που έχει χρωματιστεί όπως στο σχήμα 12.10. Όλες οι δυνατές περιπτώσεις, είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα 12.11 και οι συμμετρικές τους. Άρα σε οποιαδήποτε περίπτωση το G βάφεται με 3 χρώματα.

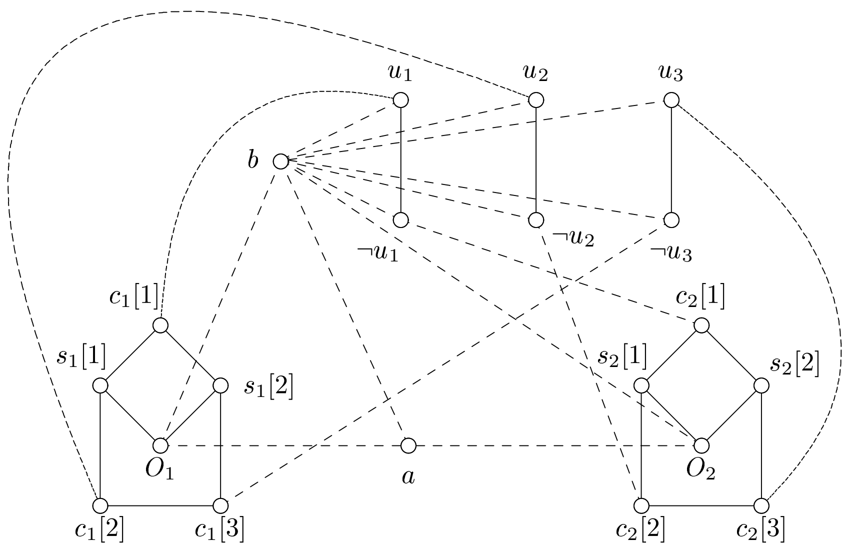


Σχήμα 12.11: Δυνατές περιπτώσεις χρωματισμών

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε τη φόρμουλα

$$\Phi\colon (u_1 \vee u_2 \vee \neg u_3) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_2 \vee u_3)$$

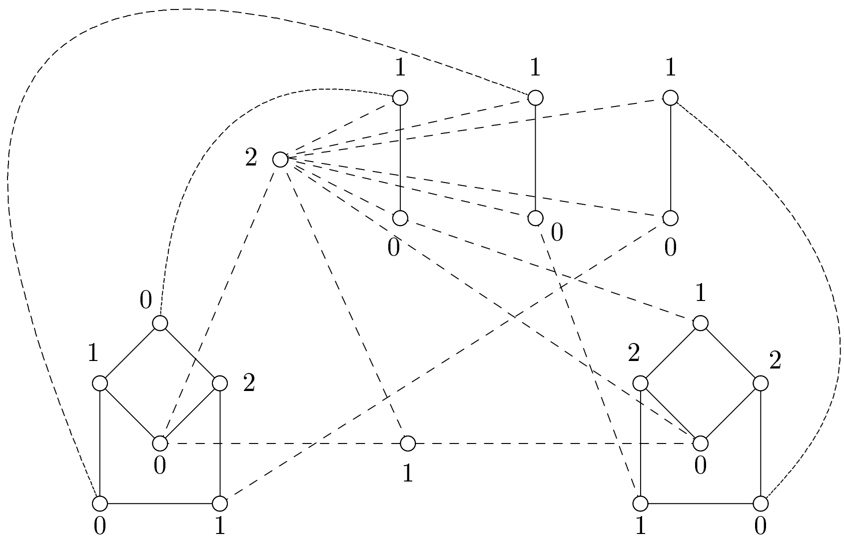
Μία απονομή που την ικανοποιεί είναι η $t(u_1, u_2, u_3) = (T, T, T)$. Ο γράφος $G(V, E)$ φαίνεται στο σχήμα 12.12. Ο χρωματισμός του γράφου $G(V, E)$ με 3 χρώματα φαίνεται στο σχήμα 12.13.



Σχήμα 12.12: Γράφος προς χρωματισμό

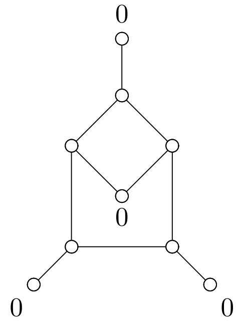
Αντίστροφα, έστω ότι ο γράφος G βάφεται με 3 χρώματα.

Έστω ότι το b έχει βαφεί με το χρώμα 2, το a με το χρώμα 1 και το O_j με το χρώμα 0. Τότε οι κόμβοι $u_i, \neg u_i$ πρέπει να βαφούν με τα χρώματα 0, 1. Θεωρούμε την απονομή $t(u_i) = True$ όταν το u_i έχει χρώμα 1 και



Σχήμα 12.13: Χρωματισμός γράφου με τρία χρώματα

$t(u_i) = False$ όταν το u_i έχει χρώμα 0. Αυτή η απονομή θα ικανοποιεί τη φόρμουλα Φ, διότι αν δεν την ικανοποιεί, σημαίνει ότι θα υπάρχει clause του οποίου όλα τα literals θα είναι False. Δηλαδή στον γράφο G θα υπάρχει υπογράφος σαν αυτόν του σχήματος 12.14. Αυτός ο υπογράφος, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, δεν βάφεται με 3 χρώματα. ΑΤΟΠΟ. □



Σχήμα 12.14: Υπογράφος που δεν χρωματίζεται με 3 χρώματα