Αριθμητική Ιεραρχία

Μπάκας Δημήτριος
$\mu\pi\lambda\forall$

Μάθημα: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα ΙΙ
Διδάσκοντες: Ζάχος Ευστάθιος – Παγουρτζής Άρης

Ορισμοί

Οι κλάσεις σχέσεων Σ_k^0 , Π_k^0 , Δ_k^0 ορίζονται με την εξής αναδρομή:

- Σ_1^0 : οι ημιαναδρομικές σχέσεις
- $\Pi_k^0 = co\Sigma_k^0$: οι αρνήσεις των σχέσεων στο Σ_k^0
- $\Sigma_{k+1}^0 = \exists\ \Pi_k^0$: οι σχέσεις που ικανοποιούν μια ισοδυναμία $P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists y)Q(\vec{x}, y)$, $Q(\vec{x}, y)$ είναι Π_k^0
- $\Delta_k^0 = \Sigma_k^0 \cap \Pi_k^0$: οι σχέσεις που είναι Σ_k^0 και Π_k^0

Κανονικές μορφές

Μια σχέση $P(\vec{x})$ ανήκει στη κλάση Γ αν είναι ισοδύναμη με την κανονική μορφή για την Γ, για κάποια αναδρομική σχέση Q.

- Σ_1^0 : $(\exists y)\ Q(\vec{x}, y)$
- Π_1^0 : $(\forall y)\ Q(\vec{x}, y)$
- Σ_2^0 : $(\exists y_1)(\forall y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2)$
- Π_2^0 : $(\forall y_1)(\exists y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2)$

κ.ο.κ.

Μορφή κλάσης

Γενικότερα, μια σχέση A είναι Σ_n^0 αν είναι της μορφής

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists x_1)(\forall x_2) \ldots \mathrm{Q} x_n\, R(\mathrm{x}, x_1 \ldots x_n)$$

όπου το Q είναι ∃ για n περιττό ή ∀ για n άρτιο.

Αντίστοιχα, μια σχέση A είναι Π_n^0 αν είναι της μορφής

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists x_1)(\forall x_2) \ldots \mathrm{Q} x_n\, R(\mathrm{x}, x_1 \ldots x_n)$$

όπου το Q είναι ∃ για n άρτιο ή ∀ για n περιττό.

Παράδειγμα

Έστω μια σχέση $P(\vec{x}) = \Pi_2^0$

$$
\begin{aligned}
P(\vec{x}) &\Leftrightarrow \neg P_1(\vec{x}) && \text{με } P_1(\vec{x}) \in \Sigma_2^0 \\
&\Leftrightarrow \neg\ (\exists y_1)\ P_3(\vec{x}, y_1) && \text{με } P_3(\vec{x}) \in \Pi_1^0 \\
&\Leftrightarrow \neg\ (\exists y_1)\ \neg P_4(\vec{x}, y_1) && \text{με } P_4(\vec{x}) \in \Sigma_1^0 \\
&\Leftrightarrow \neg\ (\exists y_1) \neg\ (\exists y_2) Q\ (\vec{x}, y_1, y_2) && \text{με Q αναδρομική} \\
&\Leftrightarrow (\forall y_1)\ (\exists y_2) Q\ (\vec{x}, y_1, y_2)
\end{aligned}
$$

Θεώρημα

Για κάθε $k \geq 1$, οι κλάσεις Σ_k^0, Π_k^0 και Δ_k^0 είναι κλειστές για αναδρομικές αντικαταστάσεις καθώς και για τους τελεστές $\&$, $\vee$, $\exists_{\leq}$ και $\forall_{\leq}$.

Επιπλέον:

- Η κλάση Δ_k^0 είναι κλειστή για την άρνηση $\neg$.
- Η κλάση Σ_k^0 είναι κλειστή για τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists$.
- Η κλάση Π_k^0 είναι κλειστή για τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall$.

Συμπεριλήψεις

Για κάθε n:

Αν $R \in \Sigma_n^0$ ή στο Π_n^0, τότε $R \in \Delta_m^0$ για όλα τα $m > n$:

- $\Sigma_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0$
- $\Pi_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0$

Ακόμα ισχύει:

- $\Delta_n^0 \subseteq \Pi_n^0$
- $\Delta_n^0 \subseteq \Sigma_n^0$

Επίσης:

- $\Sigma_n^0 \subseteq \Pi_{n+1}^0$
- $\Pi_n^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0$

- $\Sigma_n^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0$
- $\Pi_n^0 \subseteq \Pi_{n+1}^0$

Διάγραμμα Συμπεριλήψεων

Οι αριθμητικές κλάσεις ικανοποιούν το εξής διάγραμμα συμπεριλήψεων:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Sigma^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_3 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & \\
\Delta^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \cdots \\
 & \Pi^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] &
\end{tikzcd}
$$

Πλήρης ταξινόμηση

- Για κάθε n > 0, το A είναι $\Sigma_n - \pi\lambda$ήρες ανν

  $$\mathrm{A} \in \Sigma_n$$

  $$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \mathrm{B} \in \Sigma_n, \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{B} \leq_m A$$

- Για κάθε n > 0, το A είναι $\Pi_n - \pi\lambda$ήρες ανν

  $$\mathrm{A} \in \Pi_n$$

  $$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \mathrm{B} \in \Pi_n, \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{B} \leq_m A$$

Embrace Yourselves

Έρχονται οι Πολωνοί!

Tarksi – Kuratowski algorithm

Μετατροπή της σχέσης Α στη μορφή
$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n R(x, x_1 \ldots x_n)$
$\mu\varepsilon\ R\ \alpha\nu\alpha\delta\rho o\mu\iota\kappa\acute{o}\ \kappa\alpha\iota\ Q_i = \exists$ ή $\forall$

1. Αν δεν υπάρχουν οι δείκτες ∃,∀ τότε Α ∊ $\Sigma_0^0 = \Pi_0^0$
2. Αν υπάρχουν, υπολογίζουμε με k τον αριθμό τους και:
3. Αν $Q_1 = \exists$, $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ Α ∊ Σ_{k+1}^0
4. Αν $Q_1 = \forall$, $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ Α ∊ Π_{k+1}^0

Turing Jump

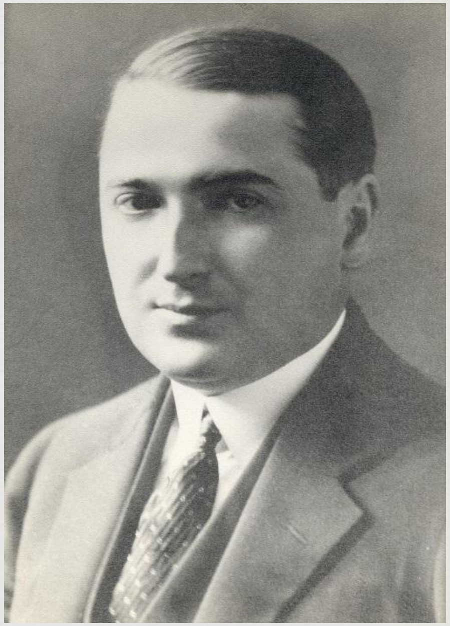
Έστω A μια γλώσσα.
Ορίζουμε $\mathrm{A}' = \{\mathrm{x} \mid \varphi_x^{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) \downarrow\}$.
Το A' είναι το jump του A και A^{ω} το $\omega -$ jump του A.

$0' = \emptyset'$ είναι το Turing jump του empty set.
$\emptyset^n$ είναι το $\mathrm{n} -$ οστό Turing jump του empty set.

Post's theorem

Για $n \geq 0$:

- $A \in \Sigma^0_{n+1} \Leftrightarrow A$ είναι α. α. στο $\Sigma^0_n \Leftrightarrow A$ είναι α. α. στο Π^0_n
- $\emptyset^n$ είναι $\Sigma_n -$ πλήρες
- $A \in \Delta^0_{n+1} \Leftrightarrow A \leq_T B$ με $B \in \Sigma_n$ ή $B \in \Pi_n$
- $A \in \Delta^0_{n+1} \Leftrightarrow A \leq_T \emptyset^n$



Θεώρημα Αριθμητικής Ιεραρχίας (1/2)

Όλες οι συμπεριλήψεις είναι αυστηρές!

Γνωρίζουμε πως $\emptyset^{\mathrm{n+1}}$ είναι $\Sigma_{\mathrm{n+1}}$ – πλήρες.
Αρκεί να δείξουμε οτι $\emptyset^{\mathrm{n+1}} \notin \Pi_{n+1}$.
Εάν $\emptyset^{\mathrm{n+1}} \in \Pi_{\mathrm{n+1}}$, τότε $\emptyset^{\mathrm{n+1}} \in \Delta_{\mathrm{n+1}}$.
Όμως απο το Θεώρημα του Post,
θα έπρεπε $\emptyset^{\mathrm{n+1}} \leq_{\mathrm{T}} \emptyset^{\mathrm{n}}$, το οποίο είναι άτοπο.

Θεώρημα Αριθμητικής Ιεραρχίας (2/2)

Οπότε οι αριθμητικές κλάσεις ικανοποιούν το ακόλουθο διάγραμμα συμπεριλήψεων:

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_3 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & \\
\Delta^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \cdots \\
 & \Pi^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] &
\end{tikzcd}
$$

Γνωστά Προβλήματα

- HP = {M | ∃t M τερματίζει με είσοδο x σε t βήματα}
- MP = {M | ∃t M αποδέχεται την είσοδο x σε t βήματα}

Άρα, HP, MP ∈ Σ_1^0.

- Το τελευταίο θεώρημα του Fermat:

∀ x, y, z, n > 2 : $x^n + y^n = z^n$ → xyz = 0

Άρα, FLT ∈ Π_1^0.

Γνωστά Σύνολα

- TOTAL = { M | φ_M είναι ολική }
  = {M | ∀x ∃t M τερματίζει με είσοδο x σε t βήματα}

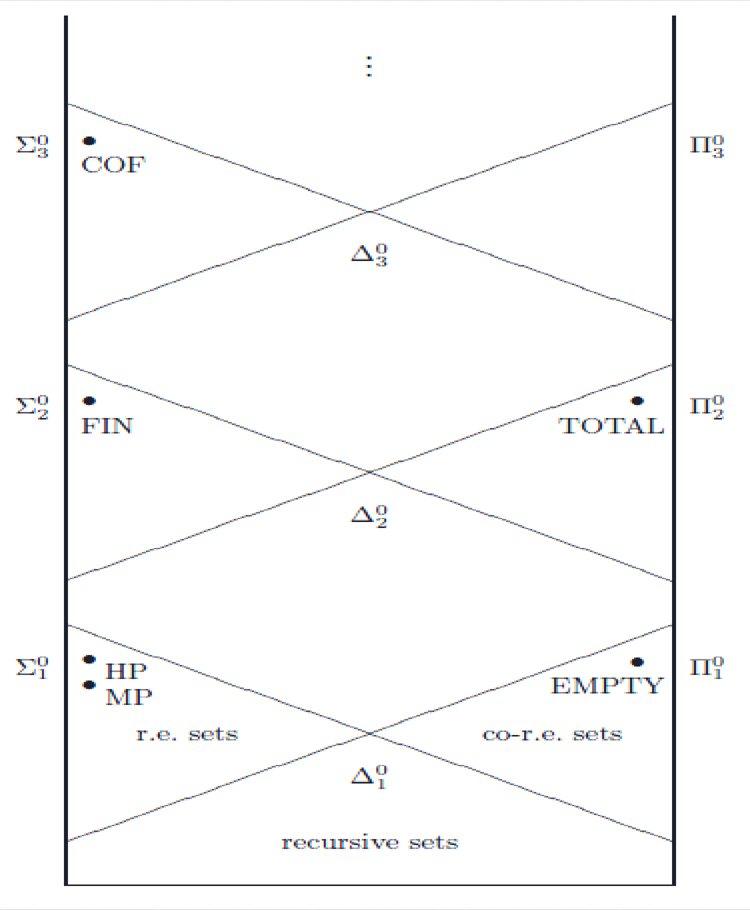
Άρα, TOTAL $\in \Pi_2^0$.

- FIN = { M | L(M) είναι πεπερασμένη}
  = {M | ∃n ∀x εάν |x|>n τότε x ∉ L(M)}
  = {M | ∃n ∀x |x| ≤ n}

Άρα, FIN $\in \Sigma_2^0$.

Κλάσεις Γνωστών Συνόλων

- EMPTY $\in \Pi_1^0$ – πλήρες
- TOTAL $\in \Pi_2^0$ – πλήρες
- INF $\in \Pi_2^0$ – πλήρες
- FIN $\in \Sigma_2^0$ – πλήρες
- COF $\in \Sigma_3^0$ – πλήρες
- HP $\in \Sigma_1^0$ – πλήρες
- MP $\in \Sigma_1^0$ – πλήρες



Κλάσεις Ανοιχτών Προβλημάτων

- Η υπόθεση Riemann είναι Π_1^0
- Το θεώρημα των 4 χρωμάτων είναι Π_1^0
- Η εικασία των δίδυμων πρώτων είναι Π_2^0
- $P \neq NP$ είναι Π_2^0

Ερώτημα:

Ποιά είναι η πολυπλοκότητα των άλλων ανοιχτών προβλημάτων;

Είναι το P=NP στο Π_1^0 ;

Βιβλιογραφία

- Theory of Computation, Texts in Computer Science
Dexter C. Kozen, 2006

- Recursion Theory
Pieter J. W. Hofstra, 2007

- Αναδρομή και Υπολογισιμότητα
Γ. Μοσχοβάκης, 2008

Ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!