Αναγωγή και διάσημα Μη Ατιοκρατικά Πολυωνυμικού Χρόνου Πλήρη προβλήματα διαφάνειες στο μάθημα Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα ΙΙ

Χρήστος Πηλιχός

Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Λογικής και Αλγορίθμων

Μάθημα της ΔΔΙΙ^{ας} Νοεμβρίου ΧΧΔΙΙ

Περιεχόμενα

Πολυωνυμική Αναγωγή

Ορισμός (Πολυωνυμική αναγωγή)

Έστω ένας αλγόριθμος α_1 ο οποίος επιλύει το πρόβλημα A_1 σε πολυωνυμικό χρόνο. Εάν ο αλγόριθμος α_2 καλεί τον α_1 ως υπορουτίνα μοναδιαίου κόστους ς γ ια να επιλύσει το πρόβλημα A_2, τότε το A_2 ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο στο A_1.

Παρατήρηση. Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP εάν για ένα καταφατικό στιγμιότυπο x υπάρχει ένα συνοπτικό (πολυωνυμικά φραγμένο σε σχέση με την είσοδο) πιστοποιητικό για το x που να μπορεί να ελεγχθεί για εγκυρότητα σε πολυωνυμικό χρόνο.

Εκδοχές προβλημάτων βελτιστοποιήσεως

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης αναπρίσταται ως (S, c), με S να είναι η εφικτή περιοχή και c είναι συνάρτηση κόστους $c : S \to \mathbb{R}$.
Εκδοχή βελτιστοποιήσεως: Δοθέντων των συνόλων P (ένα σύνολο περιορισμών από το οποίο διαφαίνεται εάν το αντικείμενο $f \in S$) και Q (το σύνολο των περιορισμών απ΄ όπου συνάγεται η τιμή $c(f)$) και των συναρτήσεων a_S και a_c να βρεθεί η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος.
Εκδοχή εκτίμησεως: Δοθέντων των P και Q να βρεθεί η βέλτιστη λύση.
Εκδοχής αναγνωρίσεως: Δοθέντως ενός στιγμιοτύπου —το οποίο είναι μια αναπαράσταση των συνόλων P και Q— και ενός ακεραίου L, υπάρχει εφικτή λύση $f \in S$ ώστε $c(f) \leq L$ (για προβλήματα ελαχιστοποίησης) ή $c(f) \geq L$ (για προβλήματα μεγιστοποίησης);

Περιεχόμενα

Ορισμός

Ορισμός

Κύκλωμα (αντ. μονοπάτι) Hamilton σε ένα γράφημα G είναι ένα κύκλωμα (αντ. μονοπάτι) το οποίο διατρέχει όλες τις κορυφές του G ακριβώς μία φορά και τις ακμές του G το πολύ μία φορά.

Το πρόβλημα ευρέσεως μονοπατιού Hamilton

Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ υπάρχει μονοπάτι στο G ώστε να περιέχει καθέ κορυφή του G ακριβώς μία φορά;

Περιεχόμενα

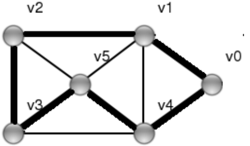
Η εύρεση Χαμιλτονιανού μονοπατιού είναι NP

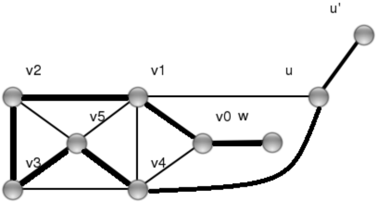
Έστω ένα καταφατικό στιγμιότυπο $(|V|, p)$ του προβλήματος του 3-χρωματισμού:

- Το πιστοποιητικό $c(x)$ θα είναι η κωδικοποίηση τ του Χαμιλτονιανού μονοπατιού p.
- Ο αλγόριθμος α θα ελέγχει:
  1. Εάν η τ είναι μονοπάτι.
  2. Εάν η τ έχει μήκος $|V| - 1$.

Αναγωγή από το πρόβλημα Χαμιλτονιανού κυκλώματος

Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ με
$V' = V \cup \{w, u, u'\}$ και για κάποια v_0,
$E' = E \cup \{\{u, u'\}, \{w, v_0\}\} \cup \{\{u, v\} : v \in N(v_0)\}$.

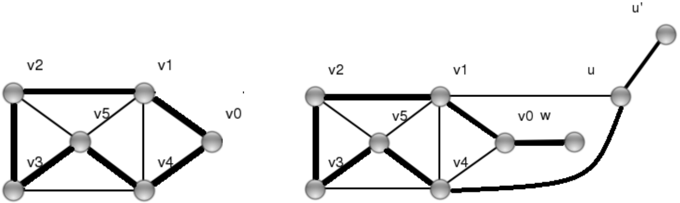




Έστω ότι το G' έχει μονοπάτι Hamilton p. Τότε, οι ακραίες ακμές του p θα είναι οι $\{u, u'\}$ και $\{v_0, w\}$ και κάποια $\{u, v\} \in p$. Το υπόλοιπο μονοπάτι διασχίζει τις κορυφές $V \setminus \{v_0, v\}$ ακριβώς μία φορά. Επειδή η $\{u, v\} \in E'$, επάγει ότι $\{v_0, v\} \in E$. Έτσι, το μονοπάτι, μαζί με την $\{v_0, v\}$ συνθέτει ένα κύκλωμα Hamilton.

Αναγωγή από το πρόβλημα Χαμιλτονιανού κυκλώματος

Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ με
$V' = V \cup \{w, u, u'\}$ και για κάποια v_0,
$E' = E \cup \{\{u, u'\}, \{w, v_0\}\} \cup \{\{u, v\} : v \in N(v_0)\}$.



Αντίθετα, έστω ότι το G έχει κύκλωμα Hamilton:
$c = [v_0, \ldots, v, v_0]$. Μπορεί να βρεθεί το μονοπάτι Hamilton στο
G: $p = [v_0, \ldots, v, u, u']$.

Περιεχόμενα

Ορισμός

Ορισμός (Περιοδεία)

Μια περιοδεία στο $G = (V, E)$, είναι μια κυκλική εναλλαγή (κύκλος) από την κορυφή i στην $\pi(i)$, $1 \leq i \leq |V|$.

Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ ορίζεται ο πίνακας διασυνδέσεων $D = [d_{ij}]$ του G ως εξής:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \{i,j\} \in E \\ 2, & \text{εάν } \{i,j\} \notin E \end{cases}$$

Έχοντας προϋπολογισμό (διαθέσιμα έξοδα) $B = |V(G)| + 1$ να βρεθεί η περιοδεία ώστε

$$\sum_{i=1}^{|V|} d_{i\pi(i)} \leq B$$

Περιεχόμενα

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητού είναι NP

Το TSP(D) είναι εξειδικευμένη περίπτωση του TSP.

Εκδοχή αναγνωρίσεως προβλήματος Περιοδεύοντος Πωλητού

Δεδομένου ενός βεβαρυμένου γραφήματος $G = (V, E)$, με $D = [d_{ij}]$ τον πίνακα διασυνδέσεων του G και $L \in \mathbb{Z}_+$ υπάρχει περιοδεία στο G με $\sum_{i=1}^{|V|} d_{i\pi(i)} \leq L$;

Δεδομένου ενός καταφατικού στιγμιοτύπου του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητού $(|V|, [d_{ij}], L)$:

- Το πιστοποιητικό $c(x)$ είναι μια κωδικοποίηση τ της περιοδείας που ισχύει $\sum_{i=1}^{|V|} d_{i\pi(i)} \leq L$.
- Ένας αλγόριθμος α θα ήλεγχε:

- Εάν τα $n, [d_{ij}]$ και L είναι κατάλληλα.
- Εάν η τ έχει μήκος το πολύ L.
- Εάν η τ είναι περιοδεία.

Αναγωγή από την εύρεση μονοπατιού Hamilton

Δοθέντως ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και του πίνακα D όπως ορίσθηκε πρώτινος:

Ισχυρισμός

Το γράφημα $G = (V, E)$ έχει μονοπάτι Hamilton μήκους τουλάχιστον B εάν και μόνον εάν υπάρχει μια περιοδεία στο G μήκους B.

Πράγματι, το μονοπάτι Hamilton έχει μήκος $|V|$, ενώ η περιοδεία έχει μήκος $|V|$ για τη μετάβαση από την αρχική πόλη στην τελική (κόστους 1 εκάστως), συν τη μετάβαση από τη τελευταία πόλη προς την αρχική (κόστους το πολύ 2).

Περιεχόμενα

Ορισμός

Εκδοχή αναγνωρίσεως του προβλήματος 3-χρωματισμού

Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και 3 χρωμάτων, υπάρχει απεικόνιση

$$\chi_G : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$$

ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα;

Περιεχόμενα

Το πρόβλημα του 3-χρωματισμού είναι NP

Έστω ένα καταφατικό στιγμιότυπο $(E, \chi_G, \{0, 1, 2\})$ του προβλήματος του 3-χρωματισμού:

- Το πιστοποιητικό $c(x)$ θα είναι η κωδικοποίηση τ της απεικονίσεως χ_G.
- Ο αλγόριθμος a θα ελέγχει:
  1. Εάν η τ είναι ορισμένη για όλες τις κορυφές του G.
  2. Εάν η τ για κάθε ακμή e του G προσδίδει διαφορετικό χρώμα στα άκρα της e.

Αναγωγή από την Όχι-Όλα-Ίδια Ικανοποιησιμότητα

Ορισμός (Όχι-Όλα-Ίδια Ικανοποιησιμότητα)

Το πρόβλημα της όχι-όλα-ίδια ικανοποιησιμότητος (NAESAT) είναι το πρόβλημα της Ικανοποιησιμότητος με επιπλέον περιορισμούς να μην υπάρχει τύπος από τη Συζευκτική Κανονική Μορφή του προβλήματος με όλες τις μεταβλητές αληθείς ή όλες ψευδείς.

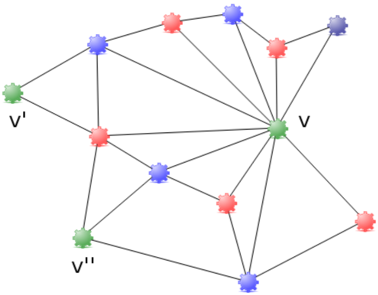
Ισχυρισμός

Το γράφημα G είναι 3-χρωματίσιμο εάν και μόνον εάν το αντίστοιχο NAESAT πρόβλημα είναι ικανοποιήσιμο.

Πράγματι, όλα τα $K_3 \subseteq_{\upsilon\pi} G$, έχουν τη μορφή $(a, x_1, \neg x_1)$ για να μην είναι όλες ομότιμες. Εάν χρωματίσουμε τον κόμβο a με το χρώμα 2, τότε το χρώμα 0 χρησιμοποιείται στους γείτονες του a που δεν χρησιμοποιείται το 1.

Περιεχόμενα

Παράδειγμα 3-χρωματισμού



1. Επιλέγεται μια κορυφή v του γραφήματος και χρησιμοποιείται το χρώμα $0 =$ πράσινο.
2. Κατ΄ όπιν, χρωματίζονται (με τα χρώματα $1 =$ μπλε, $2 =$ κόκκινο) εναλλάξ οι κορυφές σε απόσταση $d = 1$ από την v.
3. Η διαδικασία συνεχίζεται αναδρομικά και στις κορυφές απόστασης $d > 1$ (v', v'').

Περιεχόμενα

Ορισμός

Ένα πρόβλημα βελτιστοποιήσεως με συνάρτηση στόχο

$$\min f(x)$$

υπό τους περιορισμούς $g_i(x) \geq 0$, $h_j(x) = 0$, $\forall i, j$, όπου $x \in \mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ένα πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού.

Εκδοχή αναγνωρίσεως προβλήματος 0/1 προγραμματισμού

Δεδομένου του προβλήματος ακεραίου προγραμματισμού $Ax = b$ και μιας τιμής L, υπάρχει x που να ικανοποιεί $c^T x \leq L$;

Εδώ, c είναι το διάνυσμα των συντελεστών της συναρτήσεως στόχου, A ο πίνακας των συντελεστών του προβλήματος, b το διάνυσμα των σταθερών όρων των περιορισμών και x το διάνυσμα της λύσεως.

Περιεχόμενα

Το πρόβλημα του ακεραίου προγραμματισμού είναι NP

Έστω ο πίνακας συντελεστών $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$.

Θεώρημα

Εάν ένα πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού έχει εφικτή λύση, τότε οι συντεταγμένες για κάποια λύση του προβλήματος φράσσονται από την ποσότητα

$$M_2 = n \cdot (m \cdot a_1)^{2m+3}(1 + a_2)$$

με $a_1 = \max_{i,j} \{|a_{ij}|\}$ *και* $a_2 = \max_i \{|b_i|\}$.

Η λύση που παρέχεται από το παραπάνω Θεώρημα αποτελεί πιστοποιητικό για ένα καταφατικό στιγμιότυπο του προβλήματος, το οποίο σε δυαδική μορφή είναι πολυωνυμικά φραγμένο από το μέγεθος της εισόδου.

Το πρόβλημα του ακεραίου προγραμματισμού είναι NP

Εναλλακτικά, το πιστοποιητικό για το καταφατικό στιγμιότυπο μπορεί να ληφθεί από τον εξής:

Αλγόριθμος του Λένστρα

Για δεδομένο n υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που επιλύει το πρόβλημα του ακεραίου προγραμματισμού για τις n μεταβλητές.

Ανάγωγή από το πρόβλημα της Ικανοποιησιμότητος

Δεδομένου ενός στιγμιοτύπου του προβλήματος της Ικανοποιησιμότητος, η αναγωγή στο πρόβλημα του Ακεραίου Προγραμματισμού γίνεται όπως παρακάτω:
Έστω v_1, v_2, v_3 λογικές μεταβλητές. Τότε,

$$
\begin{aligned}
\neg v_1 &\equiv 1 - v_1 \\
v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3 &\equiv v_1 + (1 - v_2) + (1 - v_3) \geq 1 \\
\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3 &\equiv (1 - v_1) \cdot v_2 \cdot (1 - v_3) \geq 1
\end{aligned}
$$

κ.ο.κ., το οποίο αποτελεί μετάβαση με χρήση της άλγεβρος Bool από τους λογικούς τύπους του προβλήματος της Ικανοποιησιμότητος σε δημιουργία ανισοτήτων-περιορισμών του προβλήματος του ακεραίου προγραμματισμού.

Βιβλιογραφία

Βιβλιογραφία

- Χρίστος Παπαδημητρίου, Kenneth Steiglitz
  Combinatorial Optimization.
  Addison-Wesley Longman, 1998.
- Χρίστος Παπαδημητρίου
  Computational Complexity.
  Dover Publications, 1994.
- Sanjeev Arora, Boaz Barak
  Computational Complexity: A Modern Approach.
  Cambridge University Press, 2009.
- Χρήστος Πηλιχός
  Η ευριστική μέθοδος Simulated Annealing στην αναζήτηση βέλτιστων λύσεων σε NP συνδυαστικά προβλήματα.
  Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2012.