NP-complete problems

IS, 4-Degree IS,CLIQUE, NODE COVER, MAX CUT, MAX BISECTION, BISECTION WIDTH

Καλογερόπουλος Παναγιώτης (ΜΠΛΑ)

Ορισμός.

Έστω $G = (V, E)$ μη κατευθυνόμενο γράφημα και $I \subseteq V$.
Θα λέμε ότι το σύνολο I είναι ανεξάρτητο αν για κάθε $i, j \in I$ δεν υπάρχει ακμή που να συνδέει τα i, j.

Κάθε γράφημα έχει ανεξάρτητο σύνολο κορυφών.

IS-problem

Υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο κορυφών I με k κορυφές;

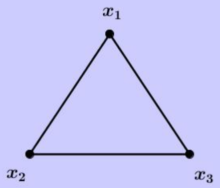
Θα αποδείξουμε ότι το Independent Set είναι NP-compete με αναγωγή του 3SAT στο Independent Set.

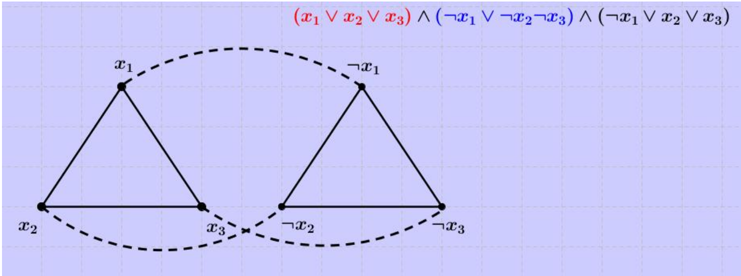
Για κάθε πρόταση $\phi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε κανονική συζευκτική μορφή θα κατασκευάσουμε κατάλληλο γράφημα του οποίου θα υπολογίσουμε το MIS .

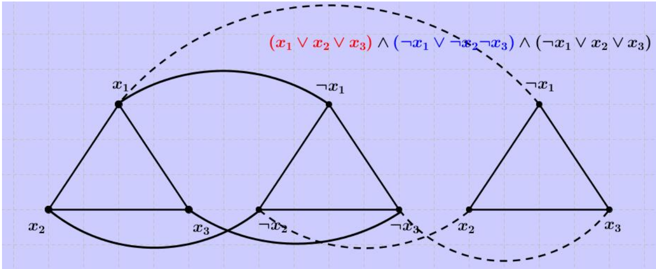
Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα:

Αν $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$




$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$
x_1
$\neg x_1$
x_2
x_3
$\neg x_2$
$\neg x_3$


$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$
x_1
$\neg x_1$
$\neg x_1$
x_2
x_3
$\neg x_2$
$\neg x_3$
x_2
x_3

Παρατηρήσεις:

- Θα περιοριστούμε σε γραφήματα οι κορυφές των οποίων μπορούν να διαχωριστούν σε m διακεκριμένα τρίγωνα.
- Κάθε τρίγωνο μπορεί να συνεισφέρει μόνο με μία κορυφή σε κάποιο ανεξάρτητο σύνολο.
- Κάθε ανεξάρτητο σύνολο μπορεί να έχει το πολύ m κορυφές.

Κατασκευή του γραφήματος.

Στην γενική περίπτωση που μας έχει δοθεί η πρόταση $\phi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε κανονική συζευκτική μορφή κατασκευάζουμε κατάλληλο γράφημα $G = (V, E)$ ως εξής:

- Για κάθε όρο $c_i, i = 1, \ldots, m$ κατασκευάζουμε τρίγωνο με «ετικέτες» κορυφών τα literals του c_i.
- Συνολικά κατασκευάζονται m το πλήθος τρίγωνα.
- Κορυφές (που ανήκουν σε διαφορετικά τρίγωνα) με ετικέτες που αντιστοιχούν σε αντίθετα literals ενώνονται με ακμή.

Ισχυρισμός.

Η ϕ είναι 3 SAT ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν το γράφημα $G = (V, E)$ έχει Independent Set I με m κορυφές.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει Independent Set I με m κορυφές.

- Κάθε τρίγωνο συνεισφέρει στο I με μια κορυφή.
- Εφόσον κορυφές με ετικέτες της μορφής $x, \neg x$ συνδέονται με ακμή, το I αποδίδει αληθοτιμές που ικανοποιούν την ϕ.
- Τα literals της ϕ με τιμή 1 είναι οι ετικέτες των κορυφών που ανήκουν στο σύνολο I.
- Εφόσον το I περιέχει m κορυφές όλοι οι όροι της ϕ ικανοποιούνται.

Αντίστροφα, αν υπάρχει μια απόδοση αληθοτιμών που ικανοποιεί την ϕ.

- Από κάθε όρο $c_i, i = 1, ..., m$ της ϕ επιλέγουμε ένα literal με αληθοτιμή 1.
- Επιλέγουμε στο γράφημα $G = (V, E)$ την κορυφή του τριγώνου (που έχει κατασκευαστεί από τον αντίστοιχο όρο c_i) με ετικέτα το literal αυτό.
- Το σύνολο I περιέχει μία κορυφή από κάθε τρίγωνο.
- Προφανώς, το I είναι Independent Set και περιέχει m κορυφές.

4-Degree Independent Set

Έστω γράφημα $G = (V, E)$.

Κάθε κορυφή του G έχει βαθμό το πολύ 4.

Υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο κορυφών με k κορυφές;

Πρόταση (9.3 [1])

Το 3SAT παραμένει NP-complete ακόμα και στην περίπτωση που κάθε μεταβλητή εμφανίζεται το πολύ 3 φορές και κάθε literal το πολύ δύο.

Έστω λοιπόν ότι η αρχική πρόταση περιέχει το πολύ 2 εμφανίσεις κάθε literal και το πολύ 3 εμφανίσεις κάθε μεταβλητής.

Κατασκευάζουμε όπως και πριν γράφημα $G = (V, E)$.

Από τον τρόπο κατασκευής του γραφήματος κάθε κορυφή έχει βαθμό το πολύ 4.

- Αν κάποιος όρος περιέχει μόνο δύο literals τότε αντί για τρίγωνο έχουμε ευθύγραμμο τμήμα στο γράφημα.
- Κάθε κορυφή συνδέεται το πολύ με δύο κορυφές που αντιστοιχούν στον ίδιο όρο.
  - Δύο κορυφές όταν ο αντίστοιχος όρος περιέχει 3 literals.
  - Μία κορυφή αν ο αντίστοιχος όρος περιέχει 2 literals .
- Κάθε κορυφή συνδέεται το πολύ με δύο κορυφές που αντιστοιχούν σε εμφανίσεις αντίθετων literals.

Αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο ότι και το 4-Degree Independent Set είναι NP-complete .

Ορισμός

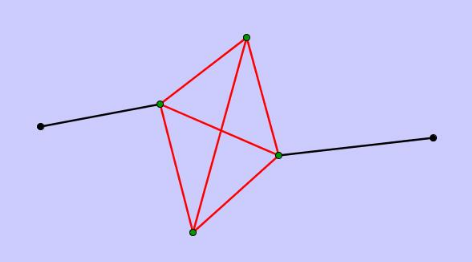
Στο πρόβλημα Clique μας δίνεται γράφημα $G = (V, E)$ και $k \in \mathbb{N}$.

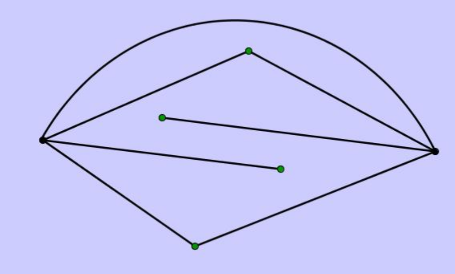
Υπάρχουν k κορυφές που να σχηματίζουν Clique ;

Παρατήρηση

Το πρόβλημα της clique είναι ισοδύναμο με το να βρούμε Independent Set στο συμπληρωματικό γράφημα.

Clique is NP-complete ○●





Node Cover is NP-complete •

Ορισμός.

Στο πρόβλημα Node Cover μας δίνεται γράφημα $G = (V, E)$ και $k \in \mathbb{N}$.

Υπάρχει σύνολο $I \subseteq V$ με k ή λιγότερες κορυφές ώστε κάθε ακμή του G να έχει το ένα άκρο της στο I;

Παρατήρηση

Το σύνολο I είναι Independent Set του γραφήματος $G = (V, E)$ αν και μόνο αν το $V - I$ είναι Node Cover του ίδιου γραφήματος.

Τομή (cut) σε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι μια διαμέριση των κορυφών σε δύο μη κενά σύνολα S και $V \setminus S$.

Μέγεθος της τομής $(S, V \setminus S)$ είναι το πλήθος των ακμών που συνδέουν τις κορυφές του S με τις κορυφές του $V \setminus S$.

Max Cut problem

Να βρεθεί τομή S μέγιστου μεγέθους. (Max Cut problem).

Θα αποδείξουμε ότι το MAX CUT είναι NP-complete με αναγωγή του NAESAT στο MAX CUT .

Για την αναγωγή θα κατασκευάσουμε κατάλληλο γράφημα. Ας περιγράψουμε τη δημιουργία του γραφήματος πρώτα σ' ένα παράδειγμα.

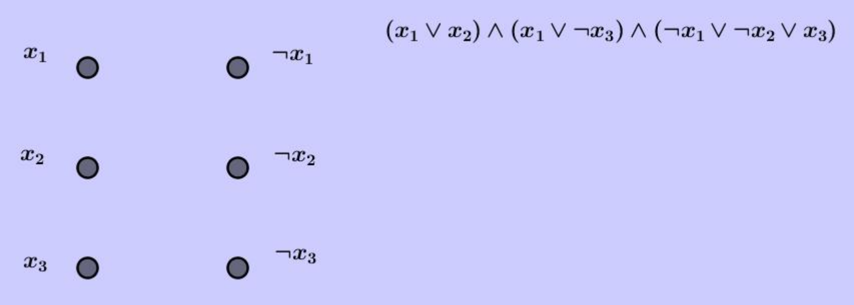
Ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί η ακόλουθη πρόταση:

$$\phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

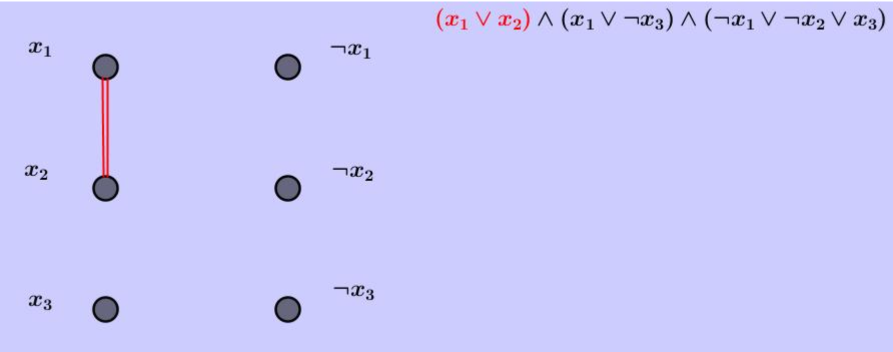
Θα κατασκευάσουμε γράφημα $G = (V, E)$ ως εξής:

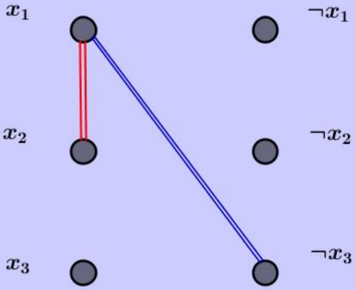
MAX CUT is NP-complete

Για κάθε μεταβλητή x που εμφανίζεται σε κάποιον όρο της πρότασης δημιουργούμε δύο κορυφές στο γράφημα τις $x, \neg x$.



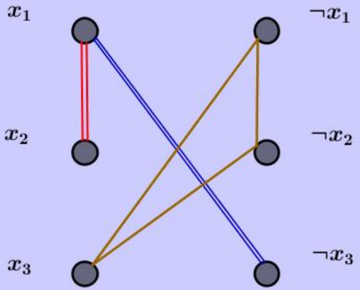
Για κάθε όρο $(x \vee y \vee z)$ που εμφανίζεται στην πρόταση ϕ δημιουργούμε ένα τρίγωνο αν τα x, y, z είναι διαφορετικά ενώ στην περίπτωση που κάποια συμπίπτουν ενώνουμε τα υπόλοιπα με δύο(!) ακμές.



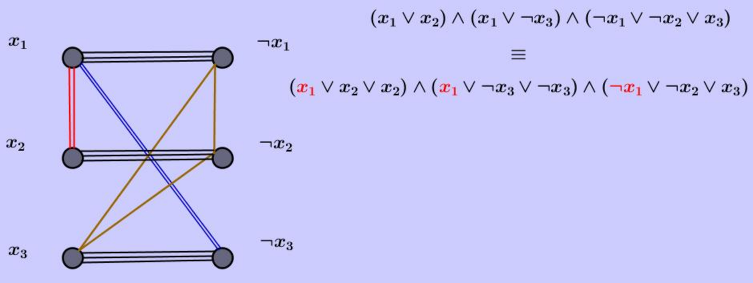


$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$

$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$



Για κάθε εμφάνιση μίας μεταβλητής x ή της άρνησης της $\neg x$ δημιουργούμε και μία ακμή που συνδέει τις κορυφές $x, \neg x$.

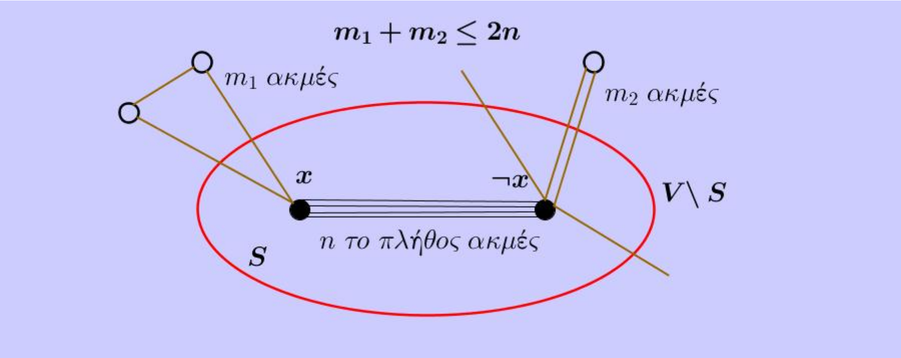


Στην γενική περίπτωση που μας έχει δοθεί η πρόταση $\phi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ και στους όρους $c_i, i = 1, \ldots, m$ εμφανίζονται οι μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ κατασκευάζουμε ένα γράφημα $G = (V, E)$ ως εξής:

- $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n\}$
- Για κάθε όρο δημιουργούμε
  - τρίγωνο που συνδέει τις κορυφές με ετικέτες τα αντίστοιχα literals (αν περιέχει 3)
  - ενώνουμε με διπλή ακμή τις κορυφές με ετικέτες τα αντίστοιχα literals (αν περιέχει 2).
- Αν μια μεταβλητή x εμφανίζεται στην πρόταση ϕ, n φορές δημιουργούμε n ακμές που συνδέουν τις κορυφές με ετικέτες $x, \neg x$.

Θα αποδείξουμε ότι η ϕ είναι NAESAT ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν το γράφημα $G = (V, E)$ έχει τομή $(S, V \setminus S)$ μεγέθους $5m$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι κορυφές με ετικέτες αντίθετα literals ανήκουν σε διαφορετικά μέρη της τομής.



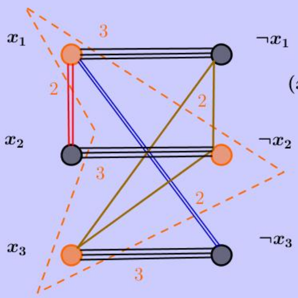
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ μεγέθους $5m$.

- Θεωρούμε ότι οι κορυφές στο σύνολο S αποδίδουν στην αντίστοιχη μεταβλητή την τιμή αληθείας 1 και όσες ανήκουν στο $V \setminus S$ την τιμή αληθείας 0.
- Υπάρχουν $3m$ το πλήθος ακμές που συνδέουν κάθε μεταβλητή με την άρνηση της.
- Οι υπόλοιπες $2m$ το πλήθος ακμές μπορούν μόνο να προκύψουν από τους m όρους της πρότασης ϕ.
  - Κάθε όρος μπορεί να συμβάλλει το πολύ με δύο ακμές.
  - Συνεπώς όλοι οι όροι έχουν ακμές που διασχίζουν την τομή (όλοι οι όροι συμβάλλουν).
  - Κάθε όρος, περιέχει έναν παράγοντα που ικανοποιείται και έναν που δεν ικανοποιείται.

Αντίστροφα, αν η ϕ είναι NAESAT ικανοποιήσιμη.

- Θεωρούμε ότι στο σύνολο S ανήκουν οι κορυφές του γραφήματος με ετικέτες που αντιστοιχούν σε literals που έχουν αληθοτιμή 1.
- Οι υπόλοιπες κορυφές ανήκουν στο $V \setminus S$.
- $3m$ το πλήθος ακμές διασχίζουν την τομή διότι αν $x \in S$ τότε $\neg x \in V \setminus S$.
- Για κάθε όρο υπάρχει ένα literal με τιμή αληθείας 1 και ένα με 0. Συνεπώς κάθε όρος συνεισφέρει με 2 ακμές στην τομή. Συνολικά $2m$ ακμές.
- Αθροίζοντας έχουμε $5m$ το πλήθος ακμές.

MAX CUT is NP-complete



$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

$$\equiv$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Max Bisection is NP-complete ● ○ ○

Ορισμός

Στο πρόβλημα Max Bisection μας δίνεται γράφημα $G = (V, E)$ και $k \in \mathbb{N}$.

Max Bisection problem

Να βρεθεί τομή S μεγέθους τουλάχιστον k ώστε $|S| = |V - S|$;

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα Max Bisection παραμένει NP-complete.

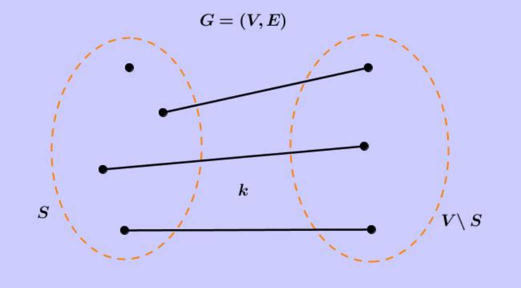
Απόδειξη.

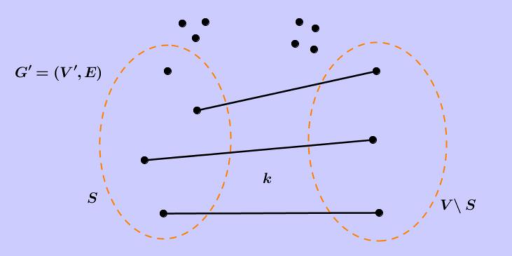
Η απόδειξη θα γίνει με αναγωγή από το Max Cut.

Max Bisection is NP-complete ○ ● ○

- Κατασκευάζουμε νέο γράφημα G' προσθέτοντας $|V|$ το πλήθος αποκομμένες κορυφές στο G.
- Το G έχει τομή μεγέθους k αν και μόνο αν το G' έχει Max Bisection μεγέθους k.
- Κάθε τομή του G μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε max bisection απλά μοιράζοντας τις κορυφές κατάλληλα στα σύνολα $S, V - S$.

Max Bisection is NP-complete ○ ○ ●





Ορισμός

Στο πρόβλημα Bisection Width μας δίνεται γράφημα $G = (V, E)$ και $k \in \mathbb{N}$.

Bisection Width

Να βρεθεί τομή S, **μεγέθους το πολύ** k **ώστε** $|S| = |V - S|$

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα Bisection Width είναι NP-complete.

Απόδειξη.

Αρκεί απλά να παρατηρήσουμε ότι το γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| = 2n$ έχει Bisection μεγέθους k αν και μόνο αν το συμπληρωματικό του γράφημα έχει Bisection μεγέθους $n^2 - k$.