Γράφοι: Προβλήματα και Αλγόριθμοι

Στάθης Ζάχος – Άρης Παγουρτζής

Μάθημα: Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Βασικές Κλάσεις Πολυπλοκότητας

P: προβλήματα απόφασης επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο από κάποιον ντετερμινιστικό αλγόριθμο.

NP: προβλήματα απόφασης επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο από κάποιον μη ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Πιθανές λύσεις (πιστοποιητικά, αποδείξεις, μάρτυρες) ελέγξιμες σε πολυωνυμικό χρόνο.

Το μεγάλο ανοιχτό ερώτημα: $\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$

NP-completeness, αναγωγές.

NP-πλήρη προβλήματα γράφων

VERTEX COVER

CLIQUE

HAMILTON CIRCUIT (HC)

TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP)

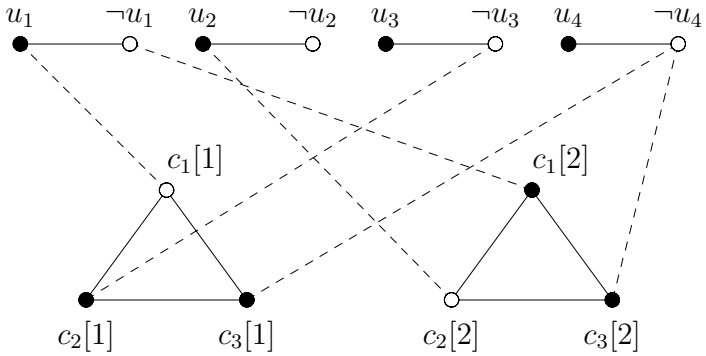
3-COLORABILITY

SUBGRAPH ISOMORPHISM

3-DIMENSIONAL MATCHING (3DM)

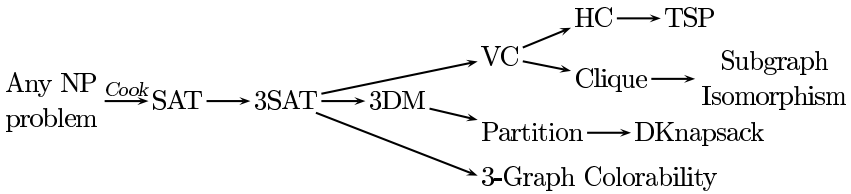
Αναγωγή 3SAT $\leq$ VERTEX COVER

Φ: $(u_1 \vee \neg u_3 \vee \neg u_4) \wedge (\neg u_1 \vee u_2 \vee \neg u_4)$



Η Φ είναι ικανοποιήσιμη ανν υπάρχει vertex cover μεγέθους $\leq k = n + 2m = 8$ στον γράφο που κατασκευάσαμε.

Αλλες Αναγωγές



Προβλήματα γράφων στην κλάση P

Κύκλος Euler.

Reachability - Διάσχιση Γράφων: DFS, BFS, D-Search.

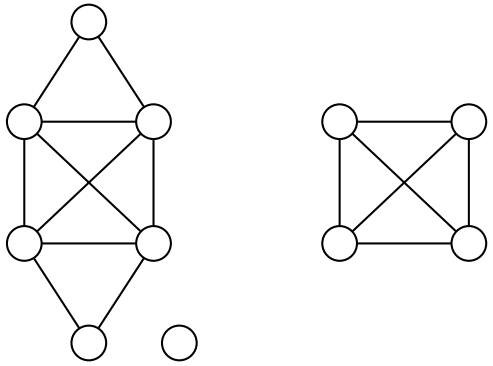
Συντομότερα μονοπάτια. Συνεκτικές συνιστώσες.

Ελάχιστο συνδετικό δένδρο (minimum spanning tree).

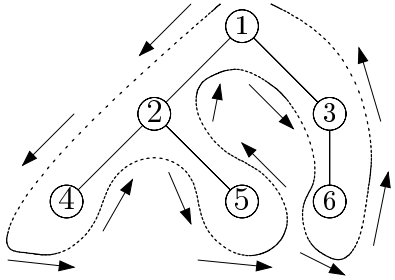
Μέγιστη ροή. Perfect matching.

Χρωματισμός ακμών σε διμερή γράφο (bipartite edge coloring).

Κύκλος Euler - Μονοπάτι Euler



Διάσχιση δένδρων



- προδιατεταγμένη: 1 2 4 5 3 6
- μεταδιατεταγμένη: 4 5 2 6 3 1
- ενδοδιατεταγμένη: 4 2 5 1 6 3

Accessibility problems - Διάσχιση γράφων

Αναζήτηση κατά βάθος (Depth First Search - DFS).

Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth First Search - BFS).

D-search: όμοιο με BFS, αλλά με στοίβα αντί για ουρά.

Διάσχιση γράφων: DFS

procedure dfs(v:vertex);

begin

visited[v]:=true;

for all vertices u adjacent to v do

if not visited[u] then dfs(u)

end

Πολυπλοκότητα: $O(|V| + |E|)$.

Διάσχιση γράφων: BFS

procedure bfs(v:vertex);

begin

initialize queue with v; visited[v]:=true;

repeat

dequeue(u);

for all vertices w adjacent to u do

if not visited[w] then

begin visited[w] := true; enqueue(w) end

until queue is empty

end

Πολυπλοκότητα: $O(|V| + |E|)$.

Συντομότερα μονοπάτια: Dijkstra

procedure Dijkstra;

begin (* Αρχικοποίηση *)

$S := \{1\}$; for i:=2 to n do begin D[i]:=cost[1,i]; P[i]:=1 end;

for i:=2 to n-1 do

begin

select w from $V - S$ such that D[w] is minimum;

$S := S + \{w\}$;

for all v in $V - S$ do

if D[v] > D[w] + C[w,v] then

P[v] := w;

D[v] := D[w]+C[w,v]

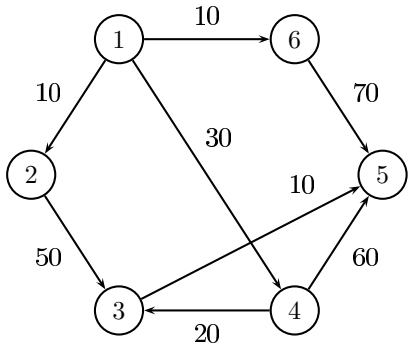
end

end

Πολυπλοκότητα: $O(|V|^2)$

All-pairs shortest paths: $O(|V|^3)$

Αλγόριθμος Dijkstra: παράδειγμα



Βήμα	S	w	D					P				
			2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
-	{1}	-	10	∞	30	∞	10	1	1	1	1	1
2	{1,2}	2		60	30	∞	10		2			
3	{1,2,6}	6		60	30	80					6	
4	{1,2,6,4}	4		50		80			4			
5	{1,2,6,4,3}	3				60					3	
6	{1,2,6,4,3,5}	5										

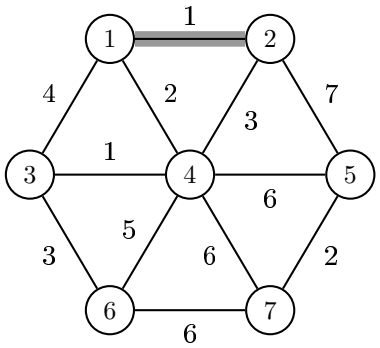
Μειονέκτημα Dijkstra: δεν δουλεύει όταν υπάρχουν ακμές με αρνητικά βάρη (γιατί;)

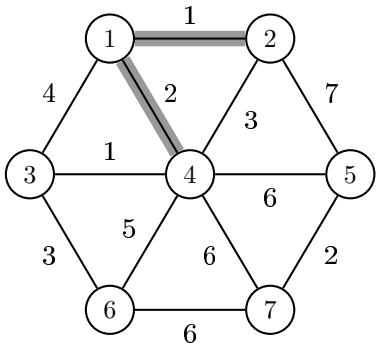
Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο (Minimum Spanning Tree - MST)

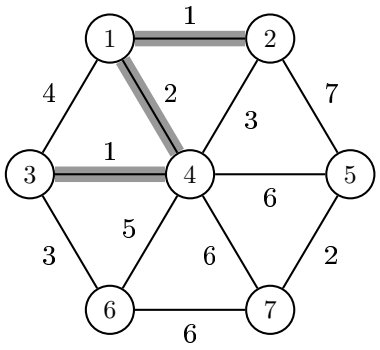
Αλγόριθμος Prim: Διαλέγουμε κάθε φορά την πλευρά ελαχίστου κόστους έτσι ώστε ο νέος υπογράφος να παραμένει δέντρο.

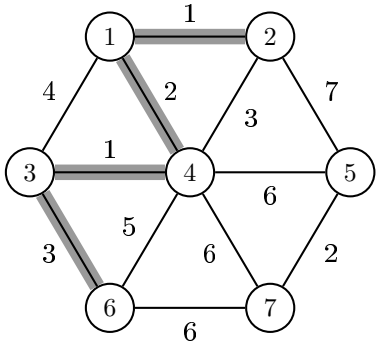
Αλγόριθμος Kruskal: Διαλέγουμε κάθε φορά την πλευρά ελαχίστου κόστους έτσι ώστε ο νέος υπογράφος να μην έχει κύκλους.

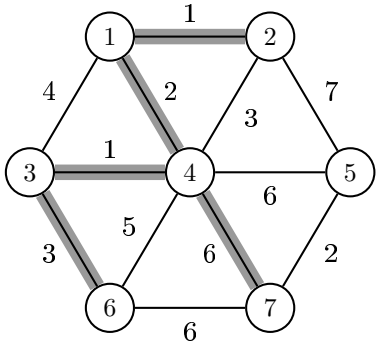
Αλγόριθμος Prim

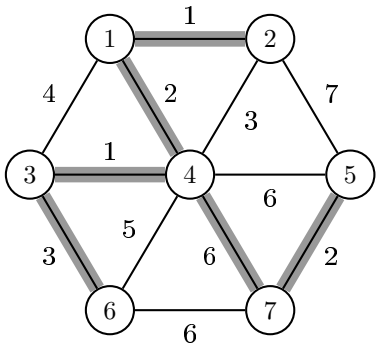



1
1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6


1
1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6


1
1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6


1
1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6

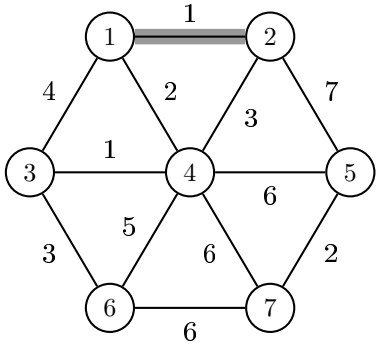


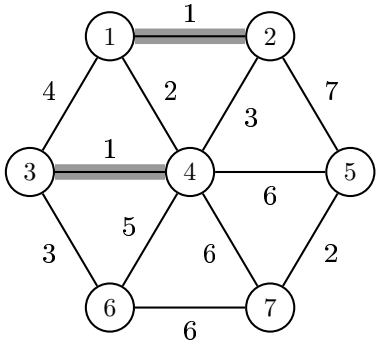
Αλγόριθμος Prim: υλοποίηση

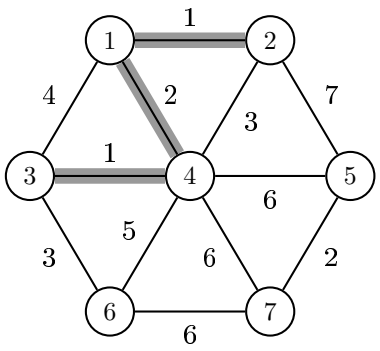
Κάθε φορά επιλέγεται ο κόμβος με την ελάχιστη απόσταση από το μέχρι στιγμής κατασκευασμένο δένδρο και προστίθεται στο δένδρο.

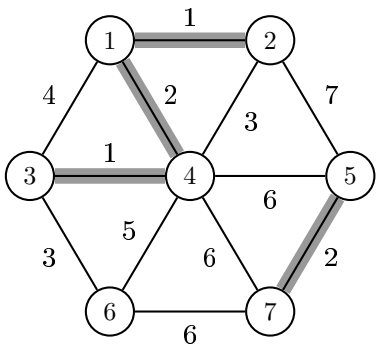
Πολυπλοκότητα: $O(|V|^2)$

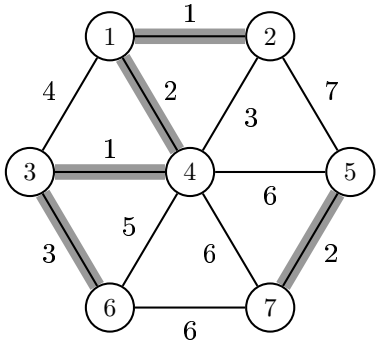
Αλγόριθμος Kruskal

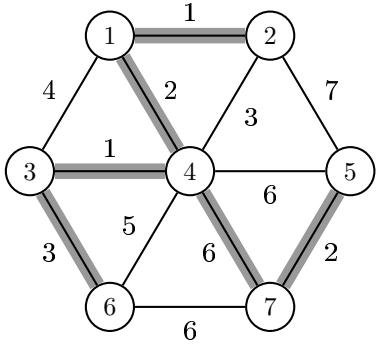





1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6


1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6


1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6


1
2
4
2
7
3
1
3
4
5
6
5
3
6
2
6
7
6

Αλγόριθμος Kruskal: υλοποίηση

Κάθε φορά επιλέγεται ακμή ελαχίστου κόστους και εάν δεν δημιουργεί κύκλο στο μέχρι στιγμής δάσος προστίθεται σε αυτό, αλλιώς απορρίπτεται.

Πολυπλοκότητα: $O(|E| \log |E|)$