Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

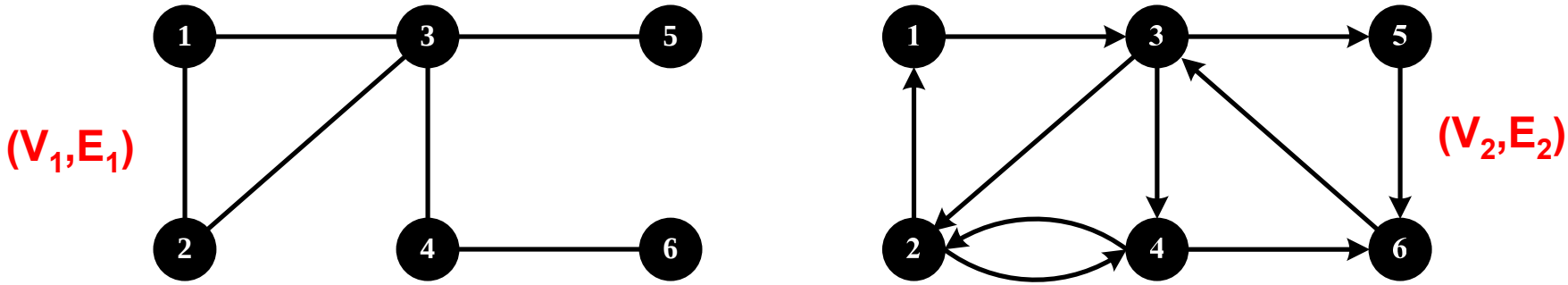
4ο εξάμηνο ΣΗΜΜΥ

4η ενότητα:
Γράφοι: προβλήματα και αλγόριθμοι

Επιμέλεια διαφανειών:
Στάθης Ζάχος, Άρης Παγουρτζής, Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

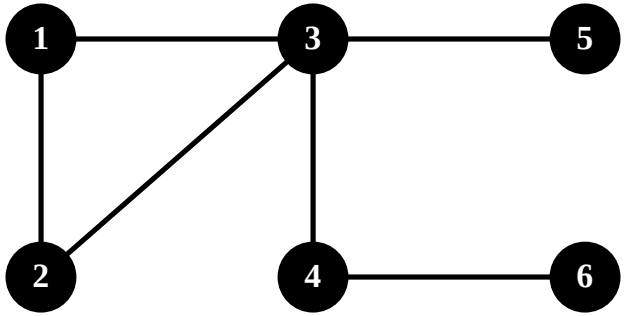
Γράφοι: κατευθυνόμενοι και μη

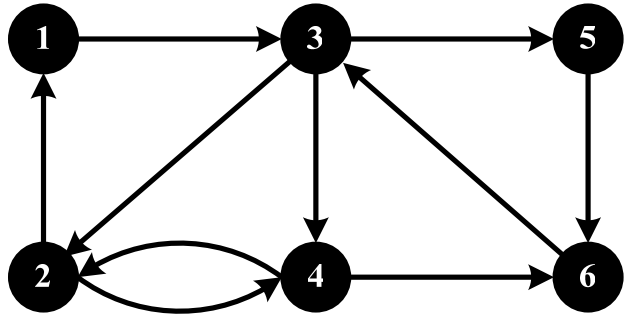


- **Γράφος (ή γράφημα):** ζεύγος **(V,E)**, **V** ένα μη κενό σύνολο, **E** διμελής σχέση πάνω στο **V**
- **Μη κατευθυνόμενος γράφος:** σχέση **E** συμμετρική
- **V**: **κορυφές** (vertices), **κόμβοι** (nodes)
- **E**: **ακμές** (edges)
  - E_1 = {{1,2}, {1,3}, {2,3}, {3,4}, {3,5}, {4,6}}
  - E_2 = {(1,3), (2,1), (2,4), (3,2), (3,4), (3,5), (4,2), (4,6), (5,6), (6,3)}

Γράφοι: ορολογία

(V_1,E_1)

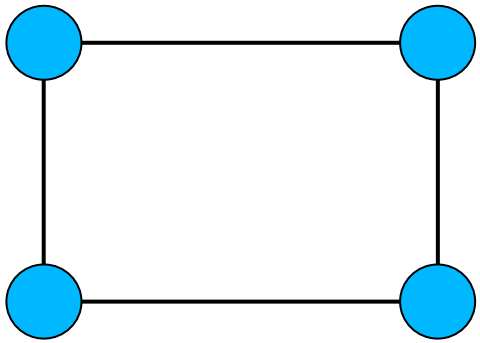




(V_2,E_2)

- **Γειτονικές** (adjacent) **κορυφές:** συνδέονται με ακμή, π.χ. 4 και 6
- **Άκρα** (endpoints) ακμής
- **Προσπίπτουσα** (incident) ακμή (σε κόμβο)
- **Γειτονικές** ακμές

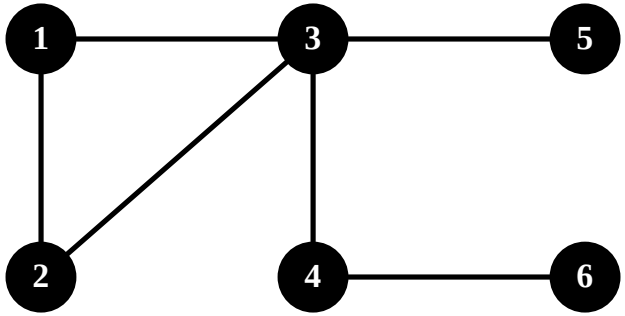
Γράφοι: ορολογία

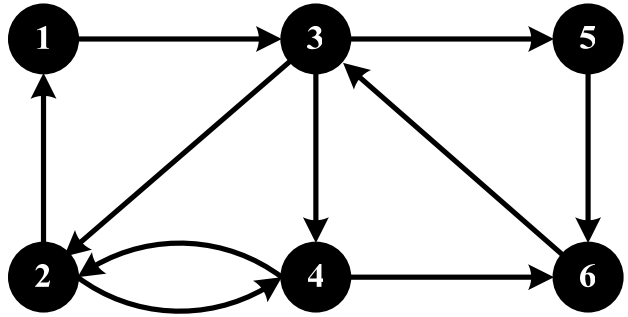


2-κανονικός γράφος

- **Βαθμός** (degree, valence) **κορυφής** v**:** ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στην v, deg(v)
- Ένας (μη κατευθυνόμενος) γράφος όπου deg(v) = k για κάθε κορυφή v, λέγεται **k-κανονικός** (k-regular)
- Σημαντική ιδιότητα: Σ deg(v) = 2|E|
- Σε κατευθυνόμενο γράφο: in-deg(v), out-deg(v)

Διαδρομές σε γράφους

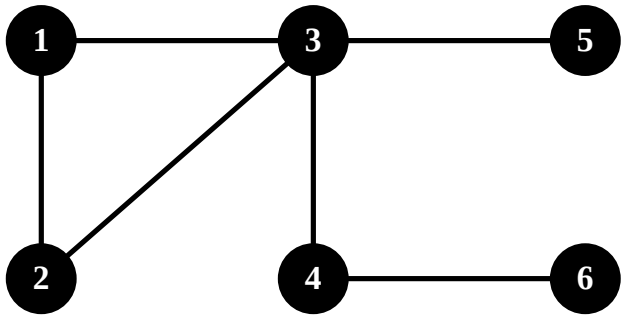




- **Δρόμος:** έγκυρη ακολουθία από κορυφές-ακμές
- **Μονοπάτι:** δρόμος χωρίς επαναλήψεις ακμών
  - **Απλό μονοπάτι:** μονοπάτι χωρίς επαναλήψεις κορυφών
- **Κύκλος:** κλειστό μονοπάτι
  - **Απλός κύκλος:** απλό κλειστό μονοπάτι
- **Μήκος δρόμου:** το πλήθος των ακμών του

Αναπαράσταση γράφων

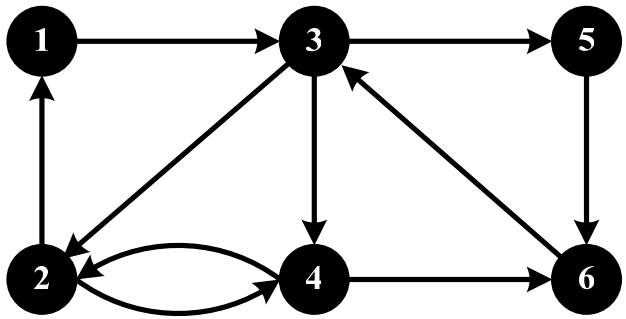
- ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i,j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
  - Αν έχουμε βάρη, $A[i,j] = w(v_i, v_j)$
  - Μη-κατευθυνόμενος: συμμετρικός πίνακας
  - Χώρος: $\Theta(n^2)$
  - Προσπέλαση γειτόνων: $\Theta(n)$
  - Άμεσος έλεγχος ύπαρξης ακμής: $O(1)$



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Αναπαράσταση γράφων

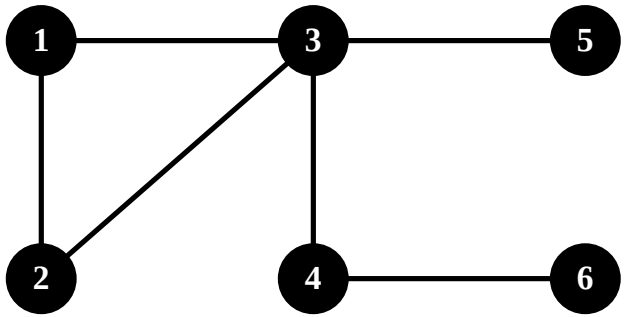
- ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i,j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
  - Αν έχουμε βάρη, $A[i,j] = w(v_i, v_j)$
  - Κατευθυνόμενος: μη-συμμετρικός πίνακας
  - Χώρος: $\Theta(n^2)$
  - Προσπέλαση γειτόνων: $\Theta(n)$
  - Άμεσος έλεγχος ύπαρξης ακμής: $O(1)$

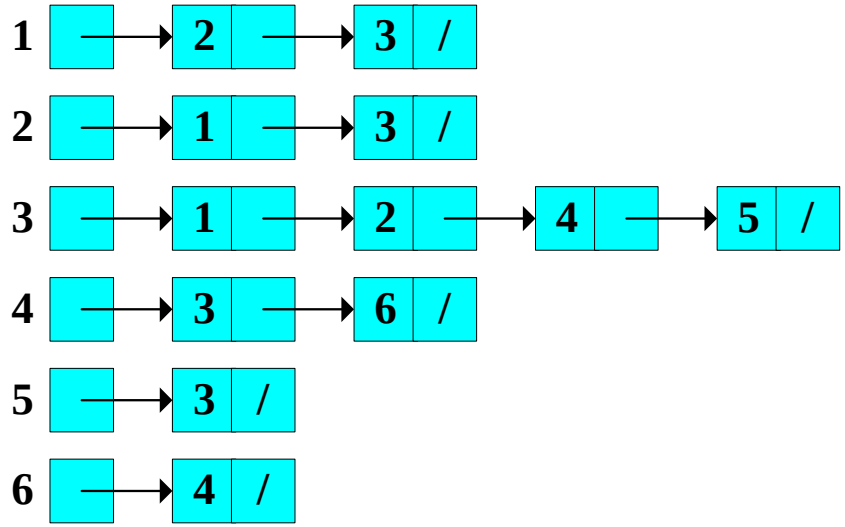


	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0

Αναπαράσταση γράφων

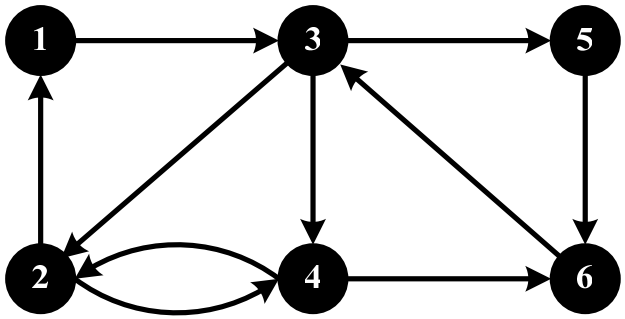
- … με **λίστες γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστες
  - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους
  - Χώρος: Θ(m)
  - Προσπέλαση γειτόνων: Θ(deg(u))
  - Έλεγχος ύπαρξης ακμής: O(deg(u))

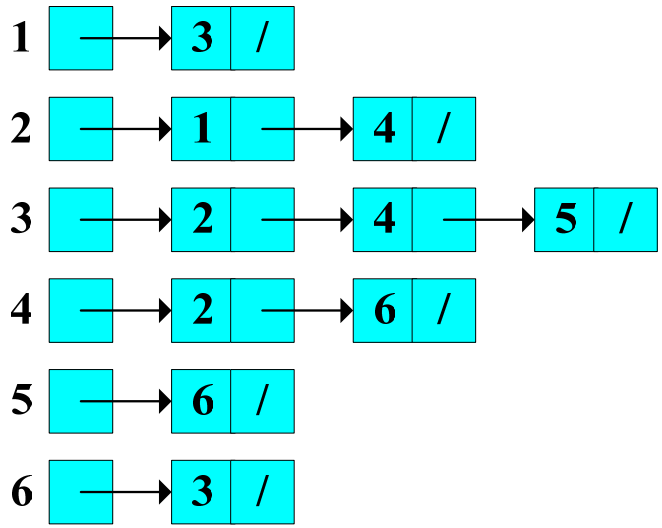




Αναπαράσταση γράφων

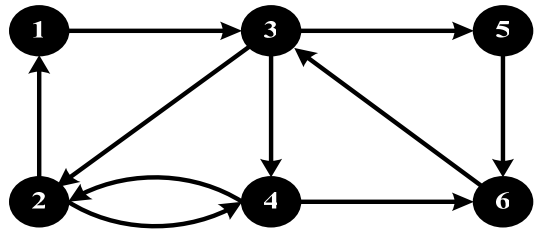
- … με **λίστες γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστες
  - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους
  - Χώρος: Θ(m)
  - Προσπέλαση γειτόνων: Θ(deg(u))
  - Έλεγχος ύπαρξης ακμής: O(deg(u))





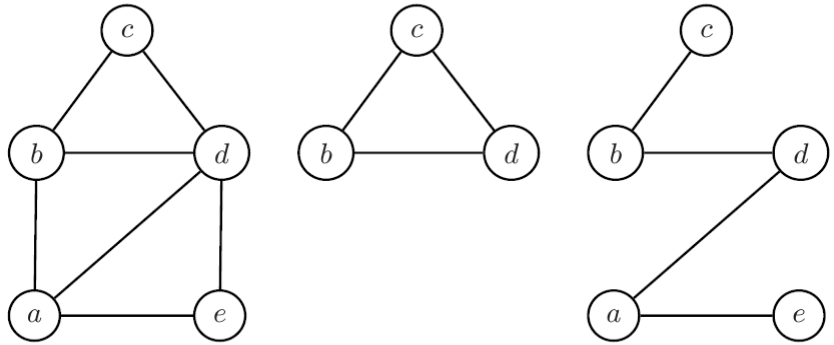
Γράφοι: συνεκτικοί και μη

- Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος λέγεται **συνεκτικός (connected)** αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του
  - Σε συνεκτικό γράφο ισχύει: $n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}, n = |V|, e = |E|.$
- Ένας κατευθυνόμενος γράφος λέγεται
  - **ισχυρά συνεκτικός (strongly connected)** αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του ακολουθώντας τις κατευθύνσεις των ακμών



  - **ασθενώς συνεκτικός (weakly connected)** αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του αγνοώντας τις κατευθύνσεις των ακμών

Άλλες έννοιες



- **Παράγων υπογράφος** (spanning subgraph)
- **Παραγόμενος υπογράφος** (induced subgraph)
- **Συνεκτικές συνιστώσες** (connected components)
- **Πλήρης γράφος (K_n), διμερής γράφος (πλήρης $K_{n,m}$)**
- **Επίπεδος γράφος:** αν δεν περιέχει ως υπογράφους τα K_5, $K_{3,3}$ - ούτε γράφους που προκύπτουν από αυτά με υποδιαιρέσεις των ακμών τους
- **Δένδρο (tree):** συνεκτικός γράφος χωρίς κύκλους

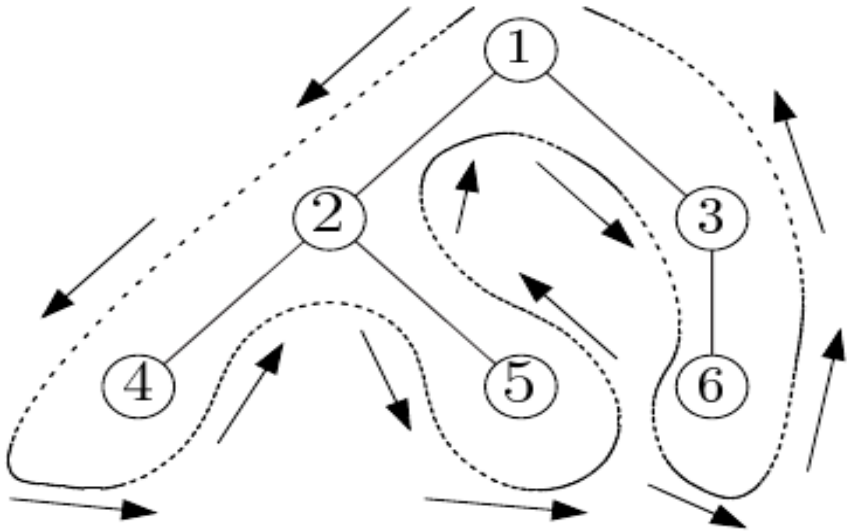
Κλάσεις πολυπλοκότητας

- **P:** προβλήματα απόφασης επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο
- **NP:** προβλήματα απόφασης με πιστοποιητικά επαληθεύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο

Προβλήματα Γράφων στην Κλάση **P**

- **Κύκλος Euler**
- **Προσβασιμότητα** (reachability) + **Διάσχιση** (traversal): DFS, BFS, ...
- **Συνεκτικές συνιστώσες** (connected components)
- **Συντομότερα μονοπάτια** (shortest paths)
- **Ελάχιστο συνδετικό δένδρο** (minimum spanning tree)
- **Μέγιστη ροή** (maximum flow)
- **Τέλειο ταίριασμα** (perfect matching)
- **Χρωματισμός ακμών διμερούς γράφου** (bipartite edge coloring)

Διάσχιση δένδρων



- Προδιατ/νη: καταγραφή κόμβου την 1η φορά που τον συναντάμε
- Ενδοδιατ/νη: καταγραφή κόμβου τη 2η φορά που τον συναντάμε (φύλλα: την 1η)
- Μεταδιατ/νη: καταγραφή κόμβου την τελευταία φορά που τον συναντάμε

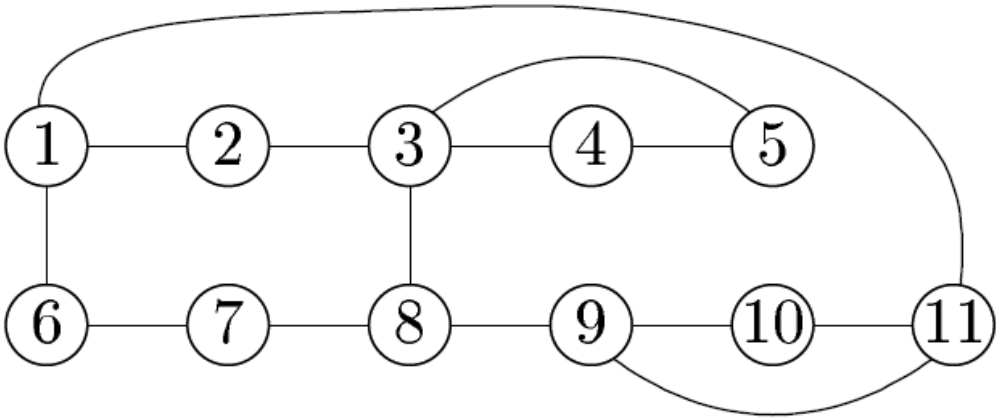
- **Προδιατεταγμένη** (preorder): 1 2 4 5 3 6
- **Ενδοδιατεταγμένη** (inorder): 4 2 5 1 6 3
- **Μεταδιατεταγμένη** (postorder): 4 5 2 6 3 1

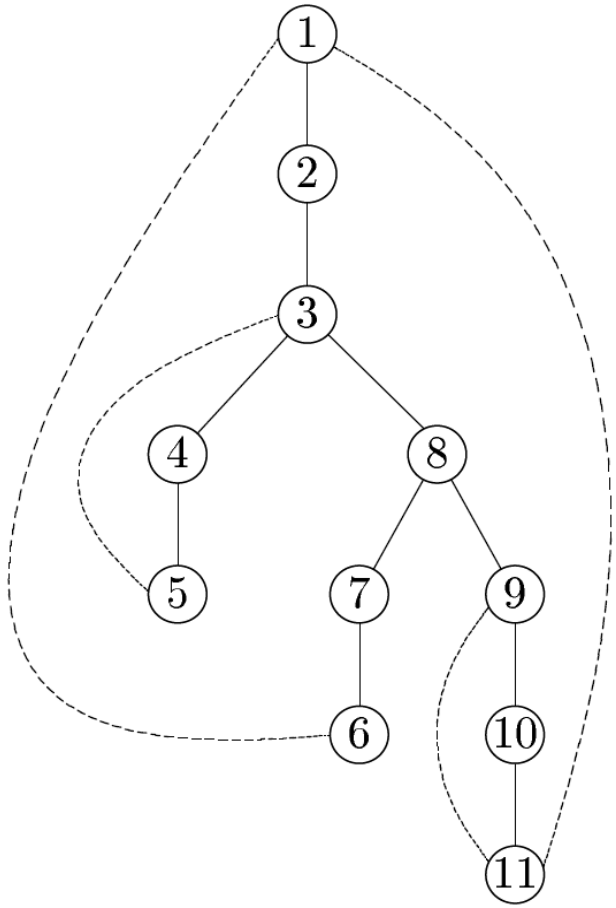
Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

```
procedure dfs(v:vertex);
begin
   visited[v]:=true;
   for all vertices u adjacent to v do
      if not visited[u] then dfs(u)
end
```

Πολυπλοκότητα O(|V|+|E|): σε κάθε κόμβο O(deg(v)) έλεγχοι και κλήσεις της dfs (*με ποια αναπαράσταση*;)

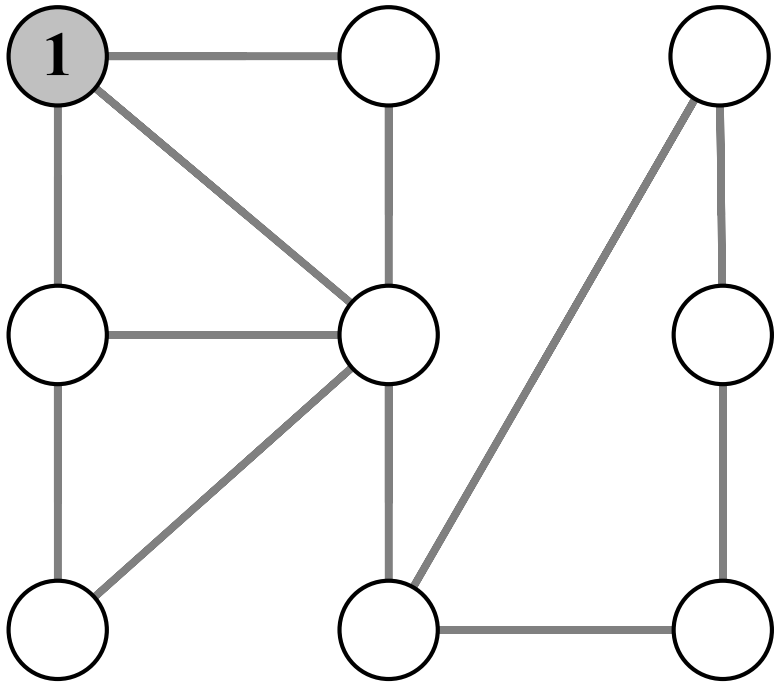
Παράδειγμα DFS



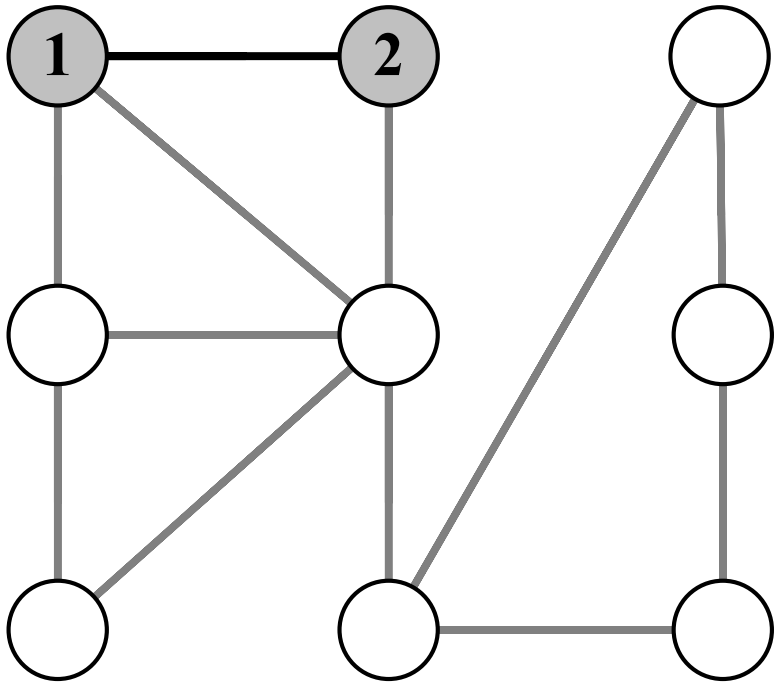



```
procedure dfs(v:vertex);
begin
   visited[v]:=true;
   for all vertices u adjacent to v do
      if not visited[u] then dfs(u)
end
```

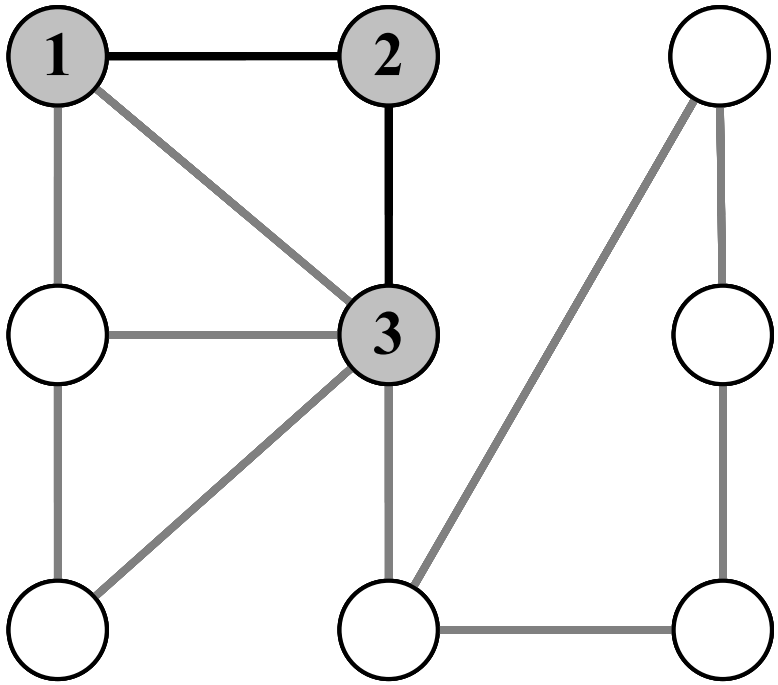
2ο παράδειγμα DFS



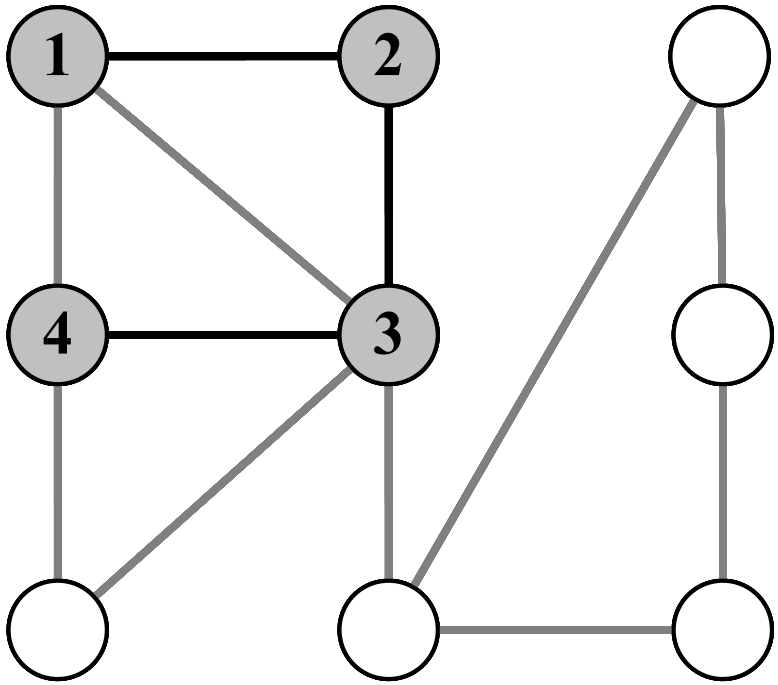
2ο παράδειγμα DFS



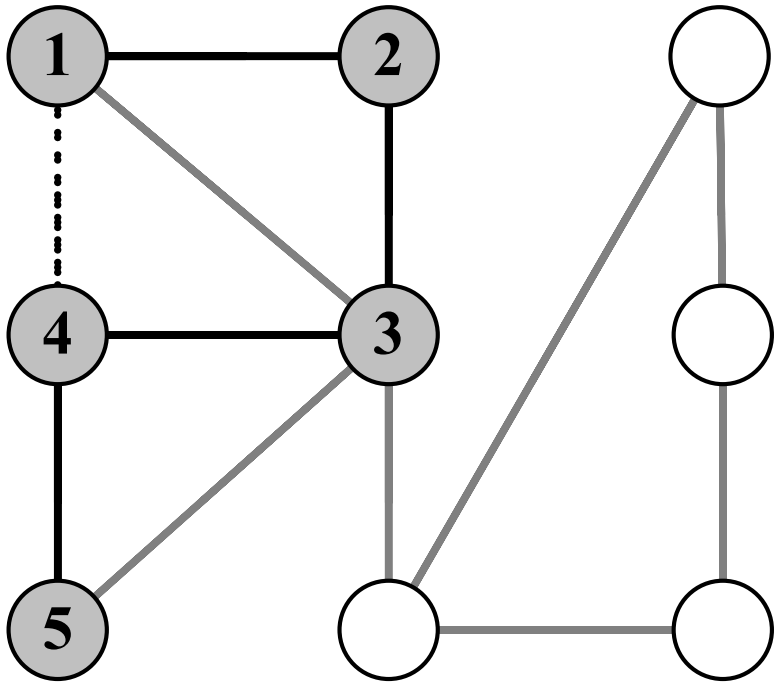
2ο παράδειγμα DFS



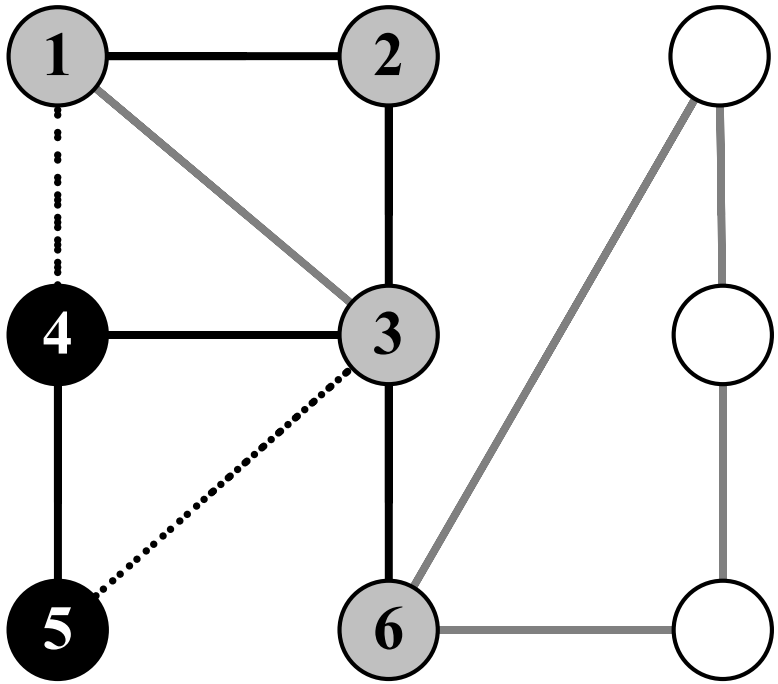
2ο παράδειγμα DFS



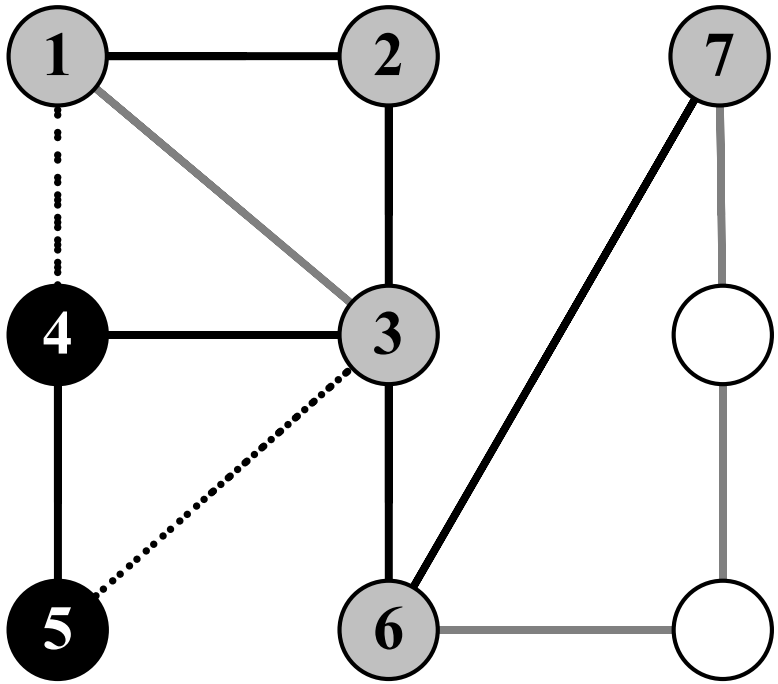
2ο παράδειγμα DFS



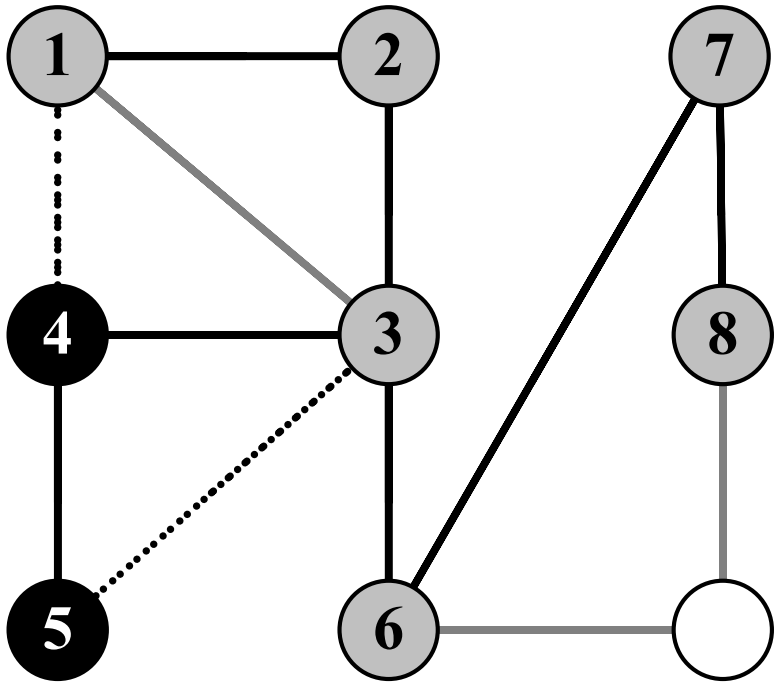
2ο παράδειγμα DFS



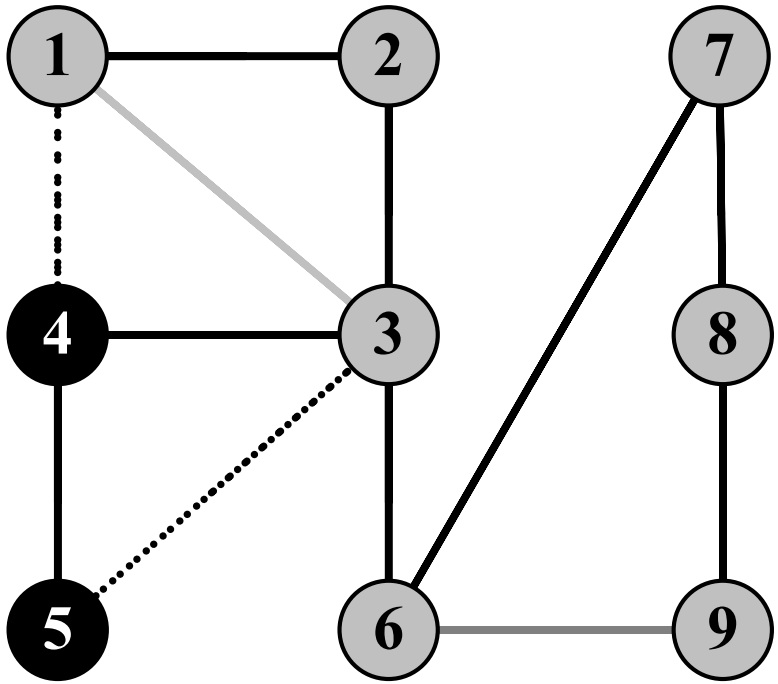
2ο παράδειγμα DFS



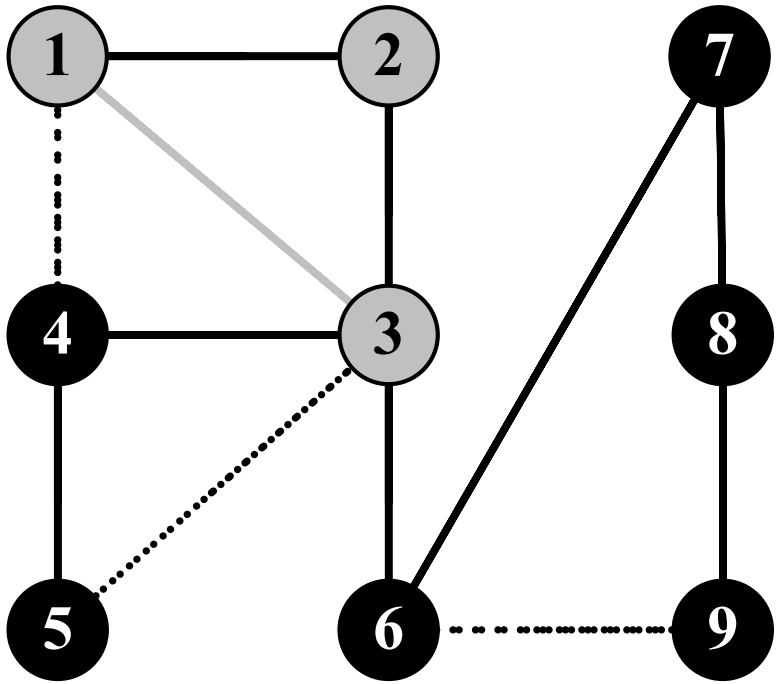
2ο παράδειγμα DFS



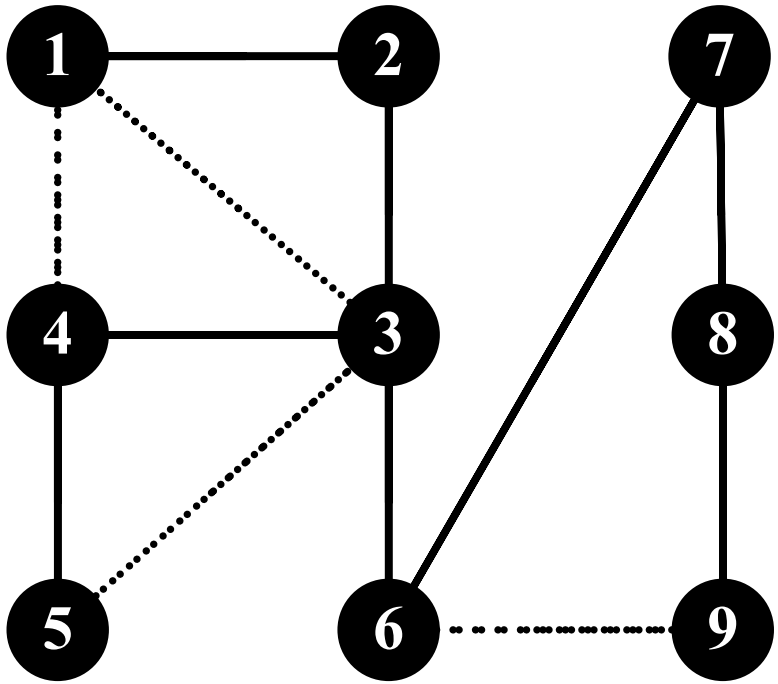
2ο παράδειγμα DFS



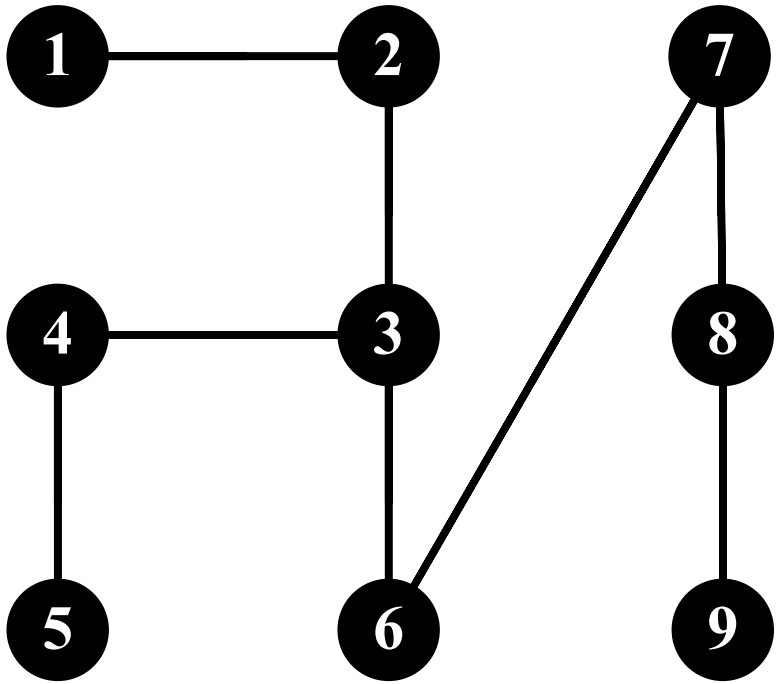
2ο παράδειγμα DFS



2ο παράδειγμα DFS



2ο παράδειγμα DFS



Επιπλέον εφαρμογές DFS

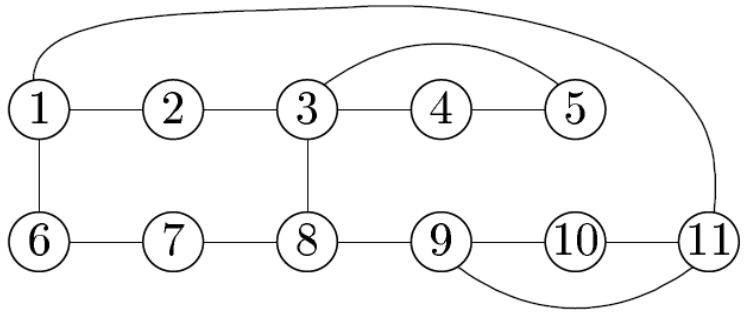
- **Έλεγχος συνεκτικότητας**
- **Εύρεση συνεκτικών συνιστωσών**
- **Εντοπισμός / εύρεση κύκλων:** με έλεγχο και χρήση *μη δενδρικών* ακμών

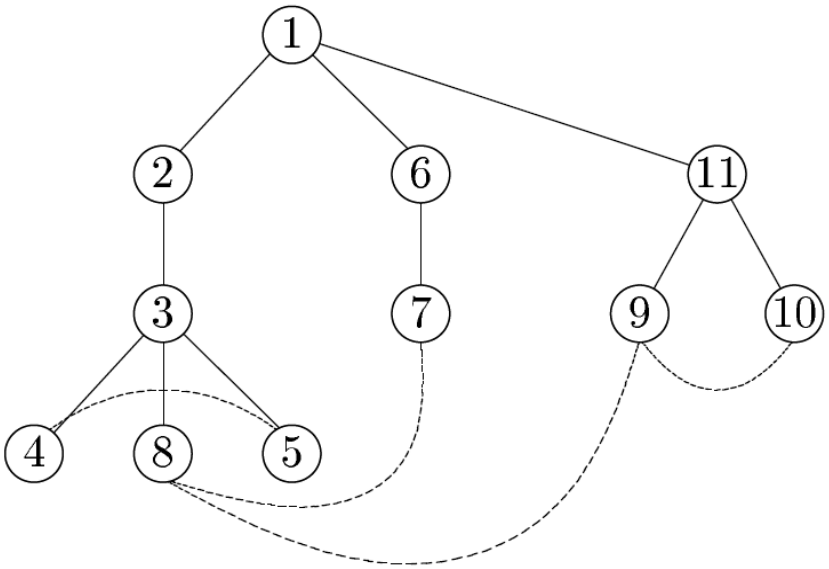
Αναζήτηση Κατά Πλάτος (BFS)

```
procedure bfs(v:vertex);
begin
  initialize queue with v; visited[v]:=true;
  repeat dequeue(u);
    for all vertices w adjacent to u do
      if not visited[w] then
        begin visited[w] := true; enqueue(w) end
  until queue is empty
end
```

Πολυπλοκότητα O(|V|+|E|): σε κάθε κόμβο v, O(deg(v)) έλεγχοι και εισαγωγές στην ουρά

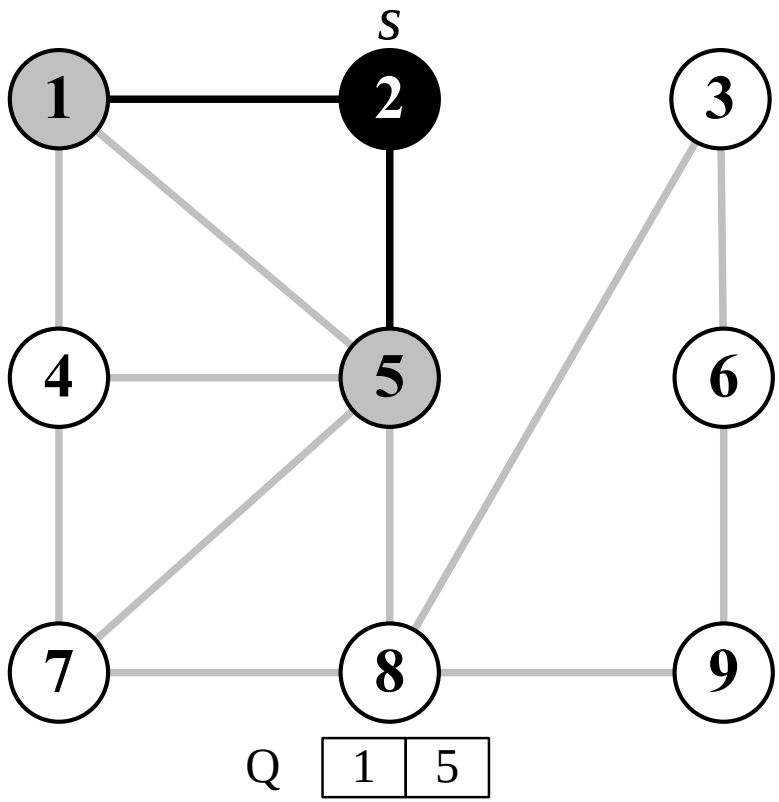
Παράδειγμα BFS



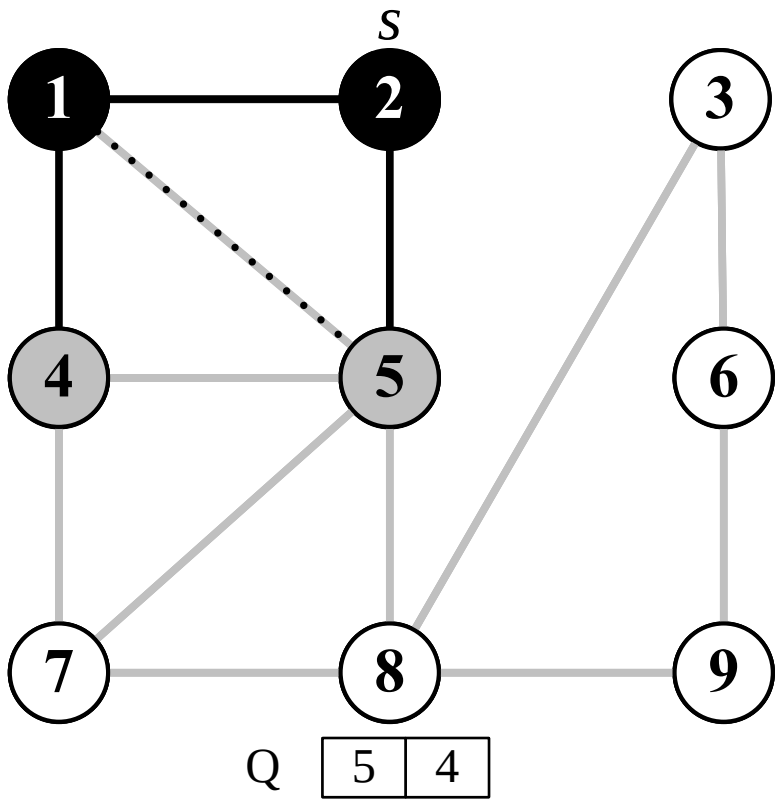


visited nodes	Queue
1	1
2	2
6	2-6
11	2-6-11
3	6-11-3
7	11-3-7
9	3-7-9
10	3-7-9-10
4	7-9-10-4
8	7-9-10-4-8
5	7-9-10-4-8-5
-	9-10-4-8-5
-	10-4-8-5
-	4-8-5
-	8-5
-	5
-	Ø

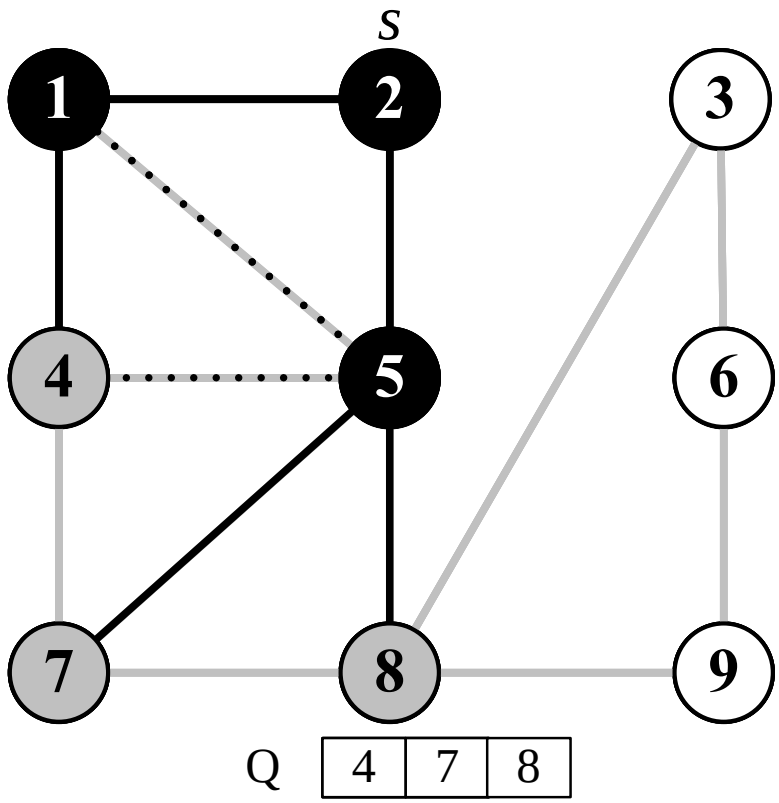
2ο παράδειγμα BFS



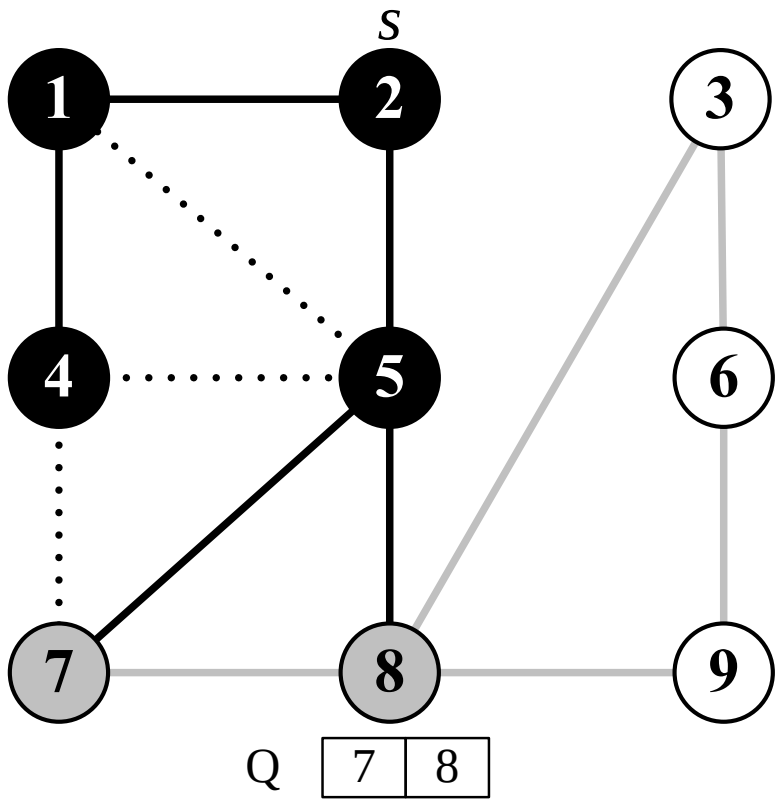
2ο παράδειγμα BFS



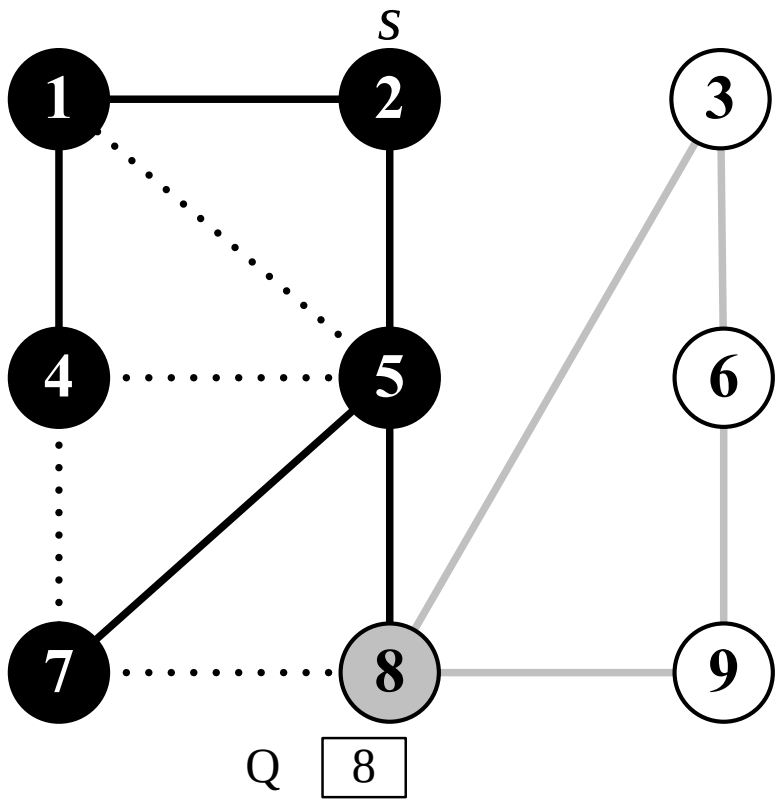
2ο παράδειγμα BFS



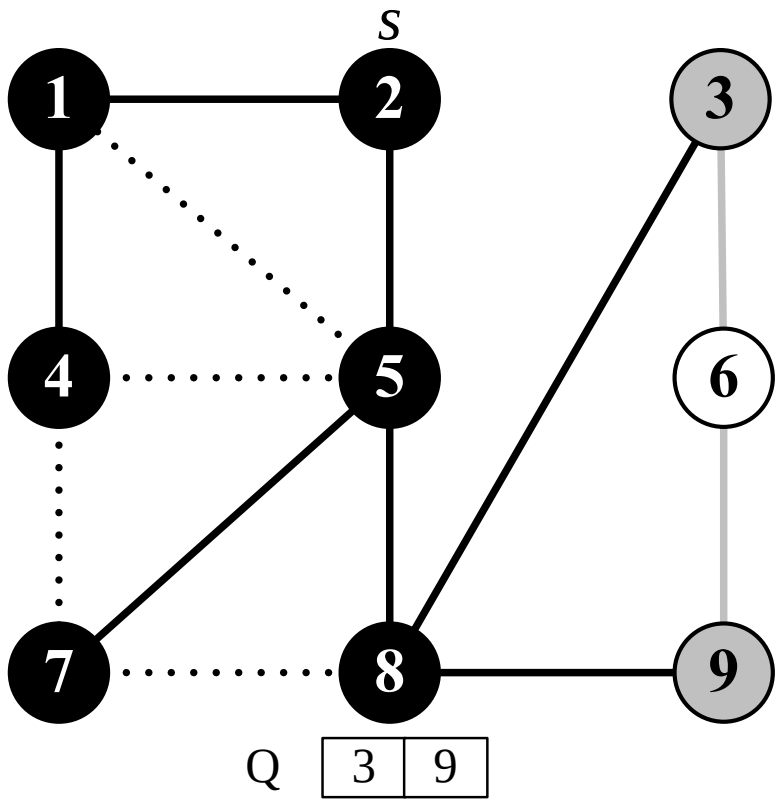
2ο παράδειγμα BFS



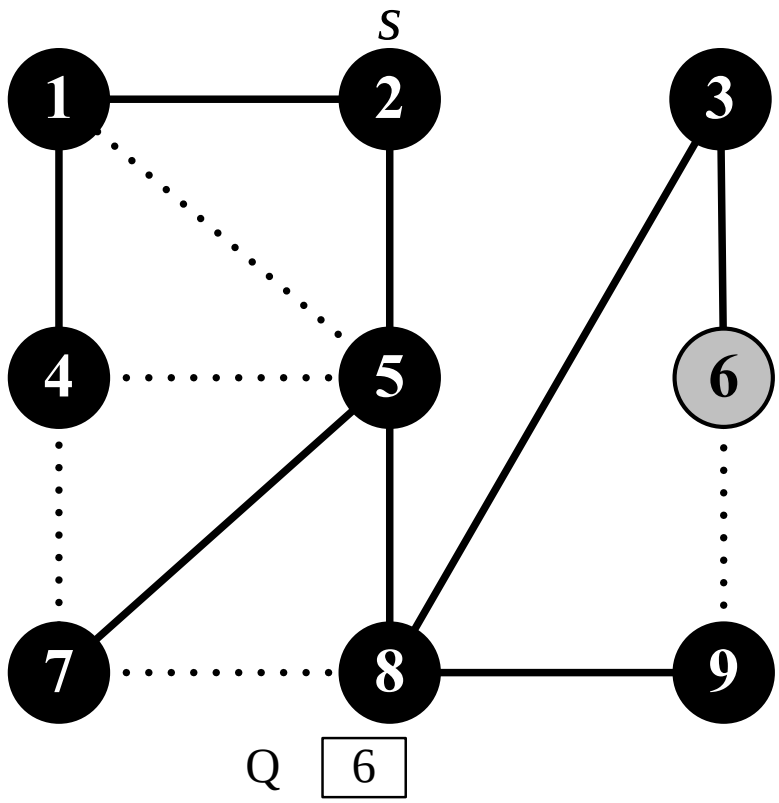
2ο παράδειγμα BFS



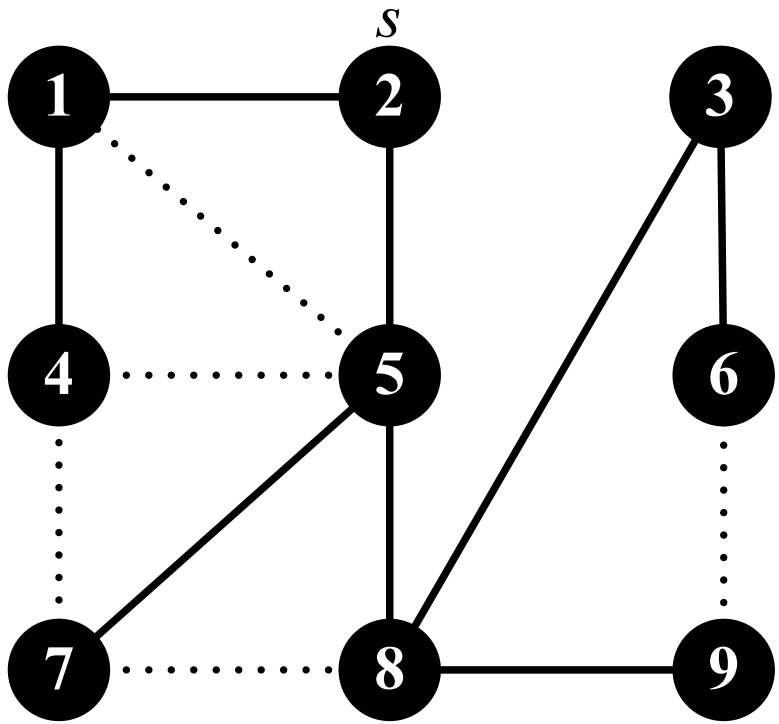
2ο παράδειγμα BFS



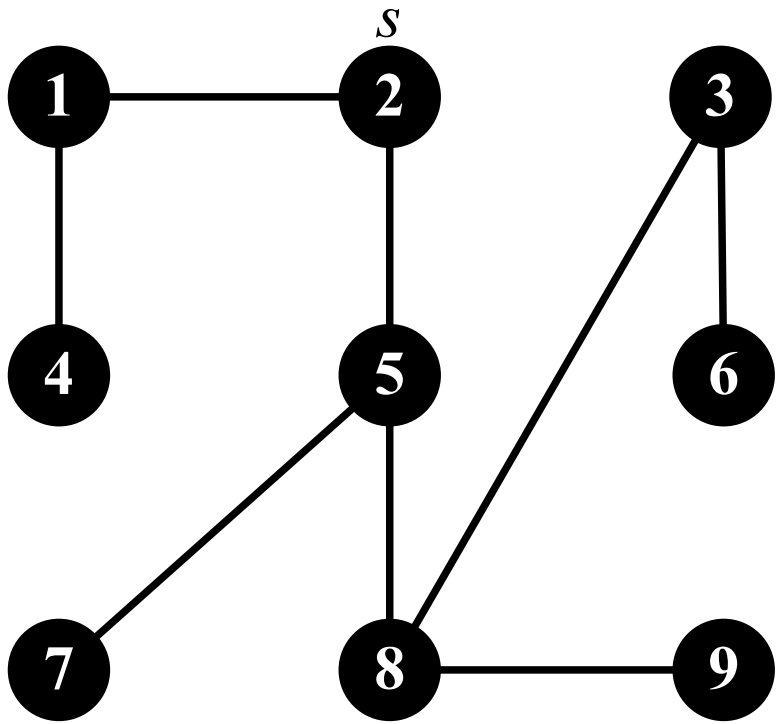
2ο παράδειγμα BFS



2ο παράδειγμα BFS



2ο παράδειγμα BFS



Επιπλέον εφαρμογές BFS

- **Έλεγχος συνεκτικότητας**
- **Εύρεση συνεκτικών συνιστωσών**
- **Εντοπισμός / εύρεση κύκλων:** με έλεγχο και χρήση *μη δενδρικών* ακμών
- **Μέτρηση αποστάσεων** από αρχικό κόμβο (σε πλήθος ακμών)

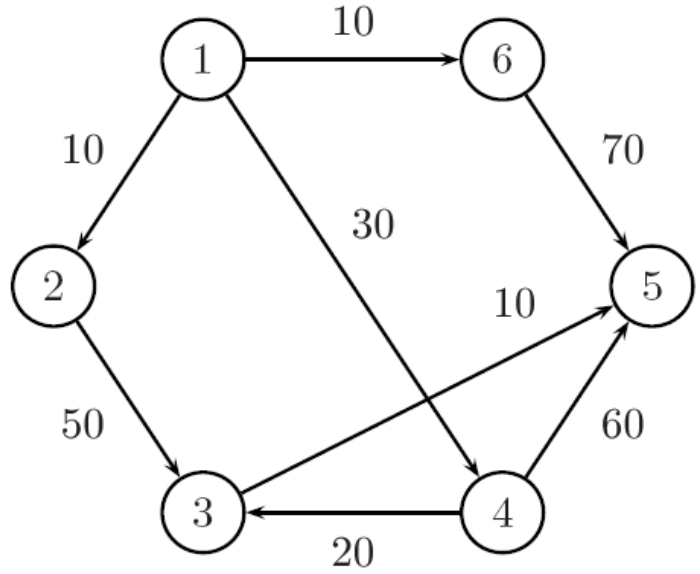
Συντομότερα Μονοπάτια (Dijkstra)

```
procedure Dijkstra;
begin (* Αρχικοποίηση *)
  S := {1};
  for i:=2 to n do begin D[i]:=cost[1,i]; P[i]:=1 end;
  for i:=2 to n−1 do
  begin
    Select w from V − S such that D[w] is minimum;
    S := S + {w};
    for all v in V − S do
    begin
      if D[v] > D[w] + C[w,v] then
      begin
        P[v] := w; D[v] := D[w] + C[w,v]
      end
    end
  end
end
```

Πολυπλ/τα $O(|V|^2)$:

σε κάθε επανάληψη $O(|V|)$ για εύρεση ελαχίστου, $O(|V|)$ για ενημέρωση αποστάσεων

Παράδειγμα Dijkstra

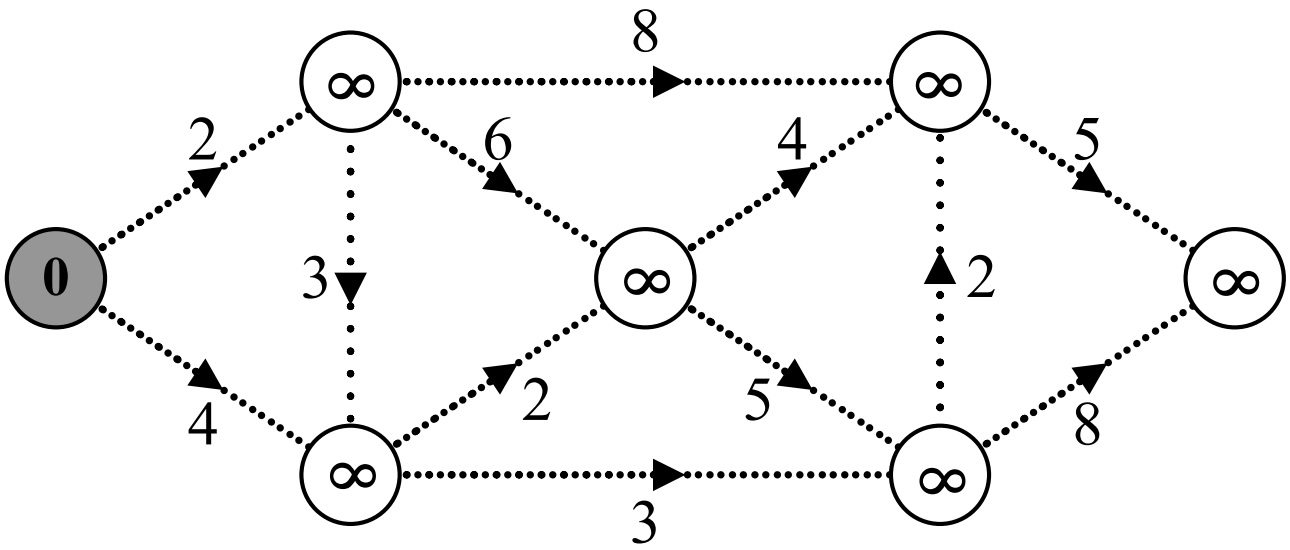



```
procedure Dijkstra;
begin (* Αρχικοποίηση *)
   S := {1}; for i:=2 to n do begin D[i]:=cost[1,i]; P[i]:=1 end;
   for i:=2 to n-1 do
  begin
     select w from V − S such that D[w] is minimum;
     S := S + {w};
     for all v in V − S do
       if D[v] > D[w] + C[w,v] then
         P[v] := w;
         D[v] := D[w]+C[w,v]
   end
end
```

Βήμα	S	w	D					P				
			2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
-	{1}	-	10	∞	30	∞	10	1	1	1	1	1
2	{1,2}	2		60	30	∞	10		2			
3	{1,2,6}	6		60	30	80					6	
4	{1,2,6,4}	4		50		80			4			
5	{1,2,6,4,3}	3				60					3	
6	{1,2,6,4,3,5}	5										

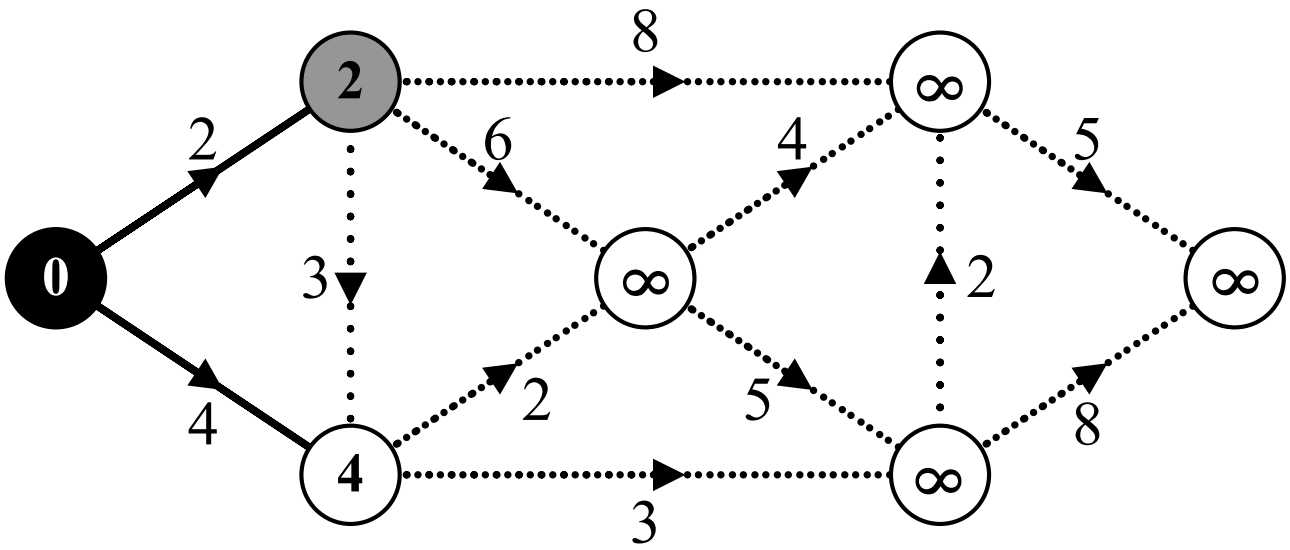
2ο παράδειγμα Dijkstra

Σε κατευθυνόμενο γράφο



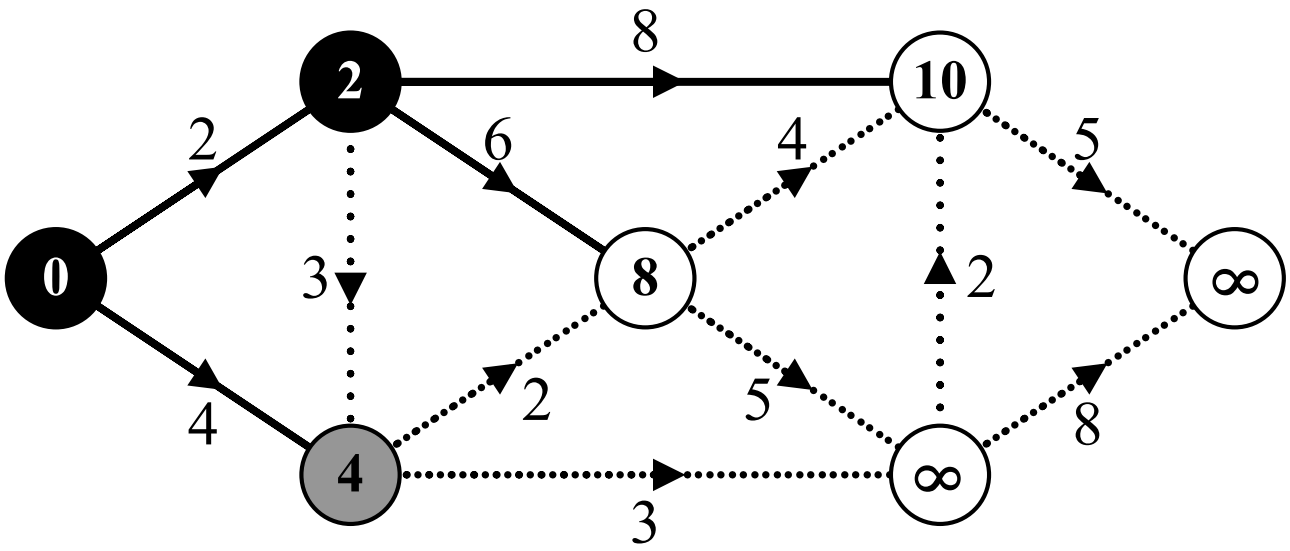
Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

2ο παράδειγμα Dijkstra



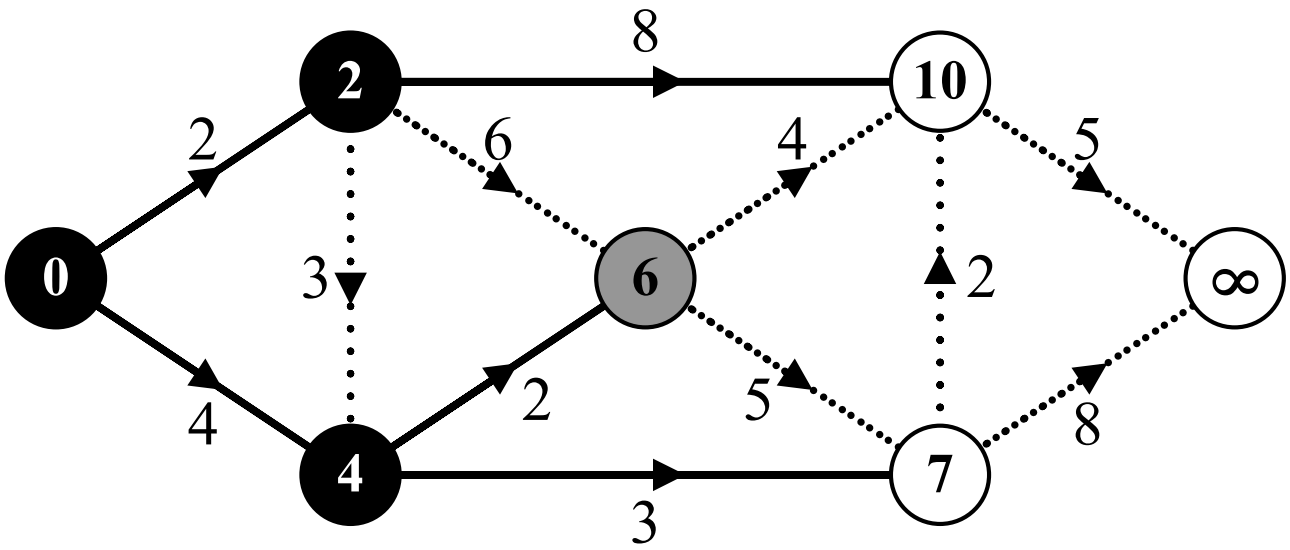
Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

2ο παράδειγμα Dijkstra



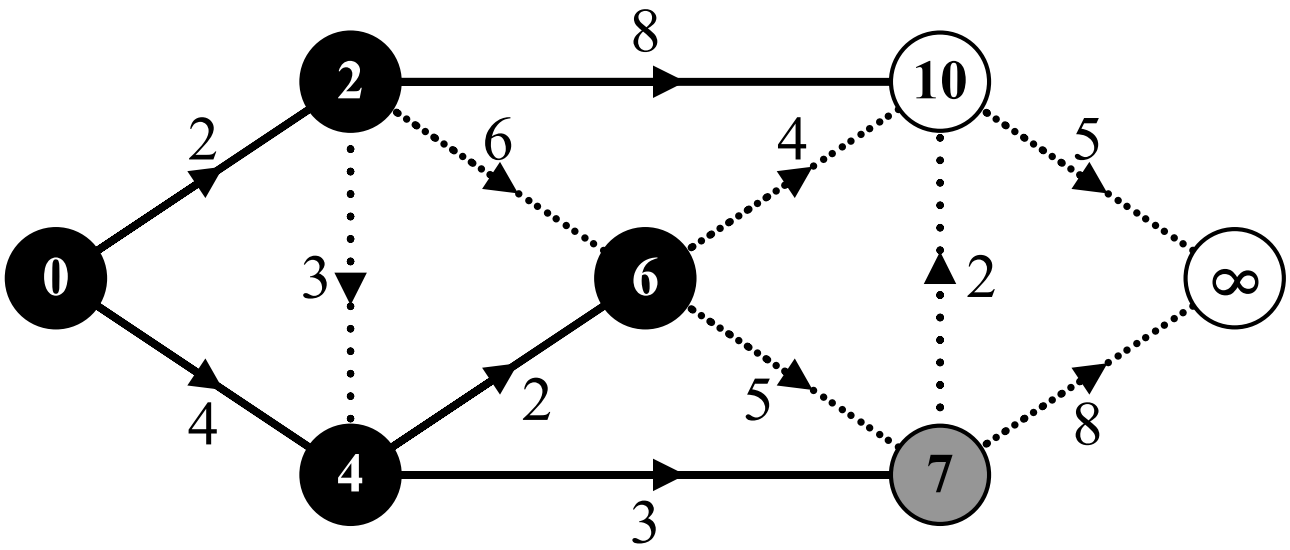
Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

2ο παράδειγμα Dijkstra



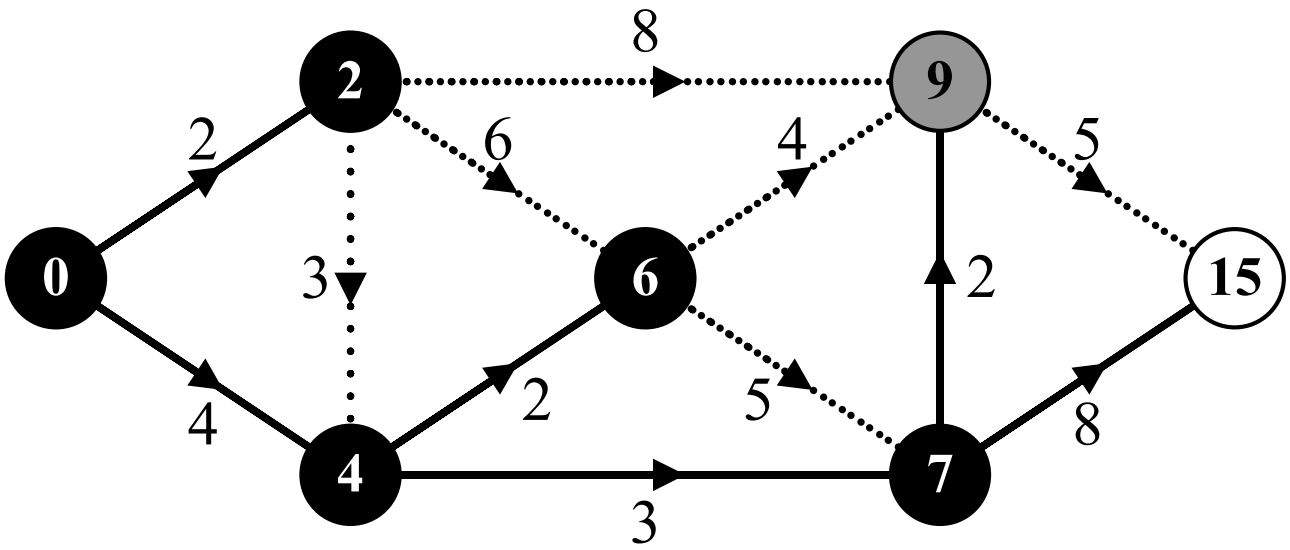
Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

2ο παράδειγμα Dijkstra



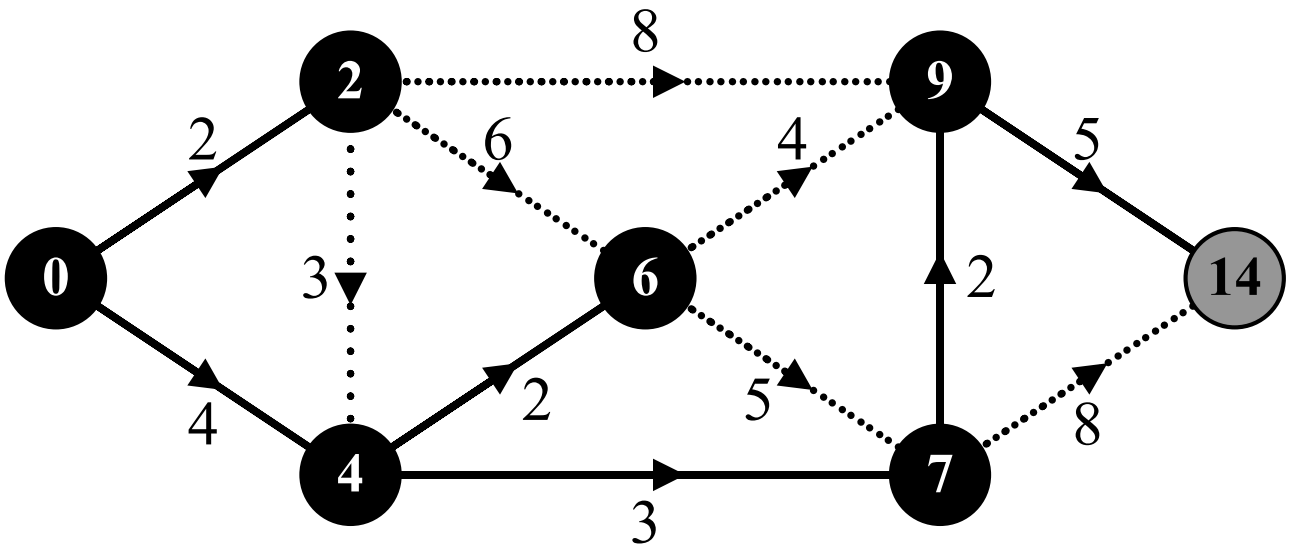
Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

2ο παράδειγμα Dijkstra



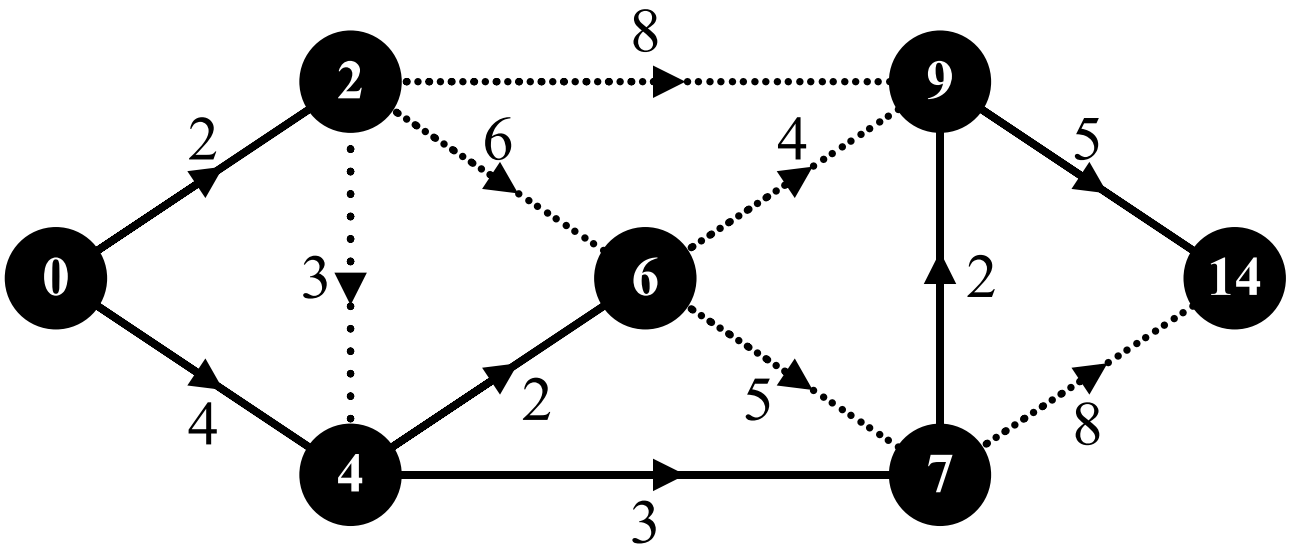
Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

2ο παράδειγμα Dijkstra



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

2ο παράδειγμα Dijkstra



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D)

Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο (MST)

- **Κριτήριο Prim:** Διαλέγουμε κάθε φορά την ακμή ελαχίστου κόστους έτσι ώστε ο νέος υπογράφος να παραμένει δένδρο
- **Κριτήριο Kruskal:** Διαλέγουμε κάθε φορά την ακμή ελαχίστου κόστους έτσι ώστε ο νέος υπογράφος να μην έχει κύκλους

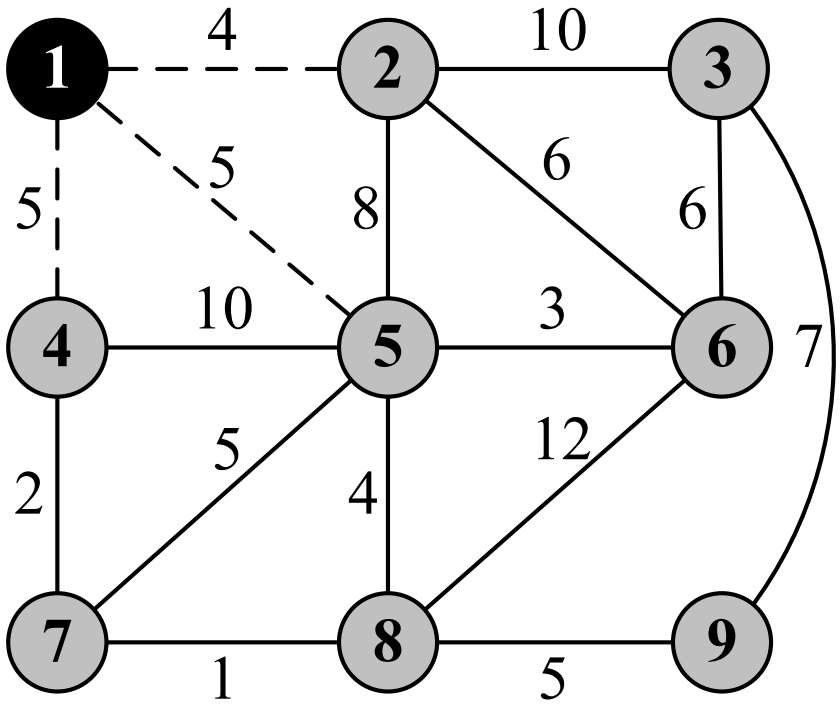
Αλγόριθμος Prim

- Επιλέγεται ένας αρχικός κόμβος, π.χ. ο κόμβος v. Η απόσταση του αρχικού κόμβου τίθεται στο 0, ενώ των υπόλοιπων κόμβων στο ∞.
- Κάθε φορά επιλέγεται ο κόμβος, έστω w, με την ελάχιστη απόσταση *από το μέχρι στιγμής κατασκευασμένο δένδρο*, και προστίθεται στο δένδρο. Ενημερώνονται οι αποστάσεις των υπόλοιπων κόμβων από το δένδρο με βάση το κόστος των ακμών (w,u_i):

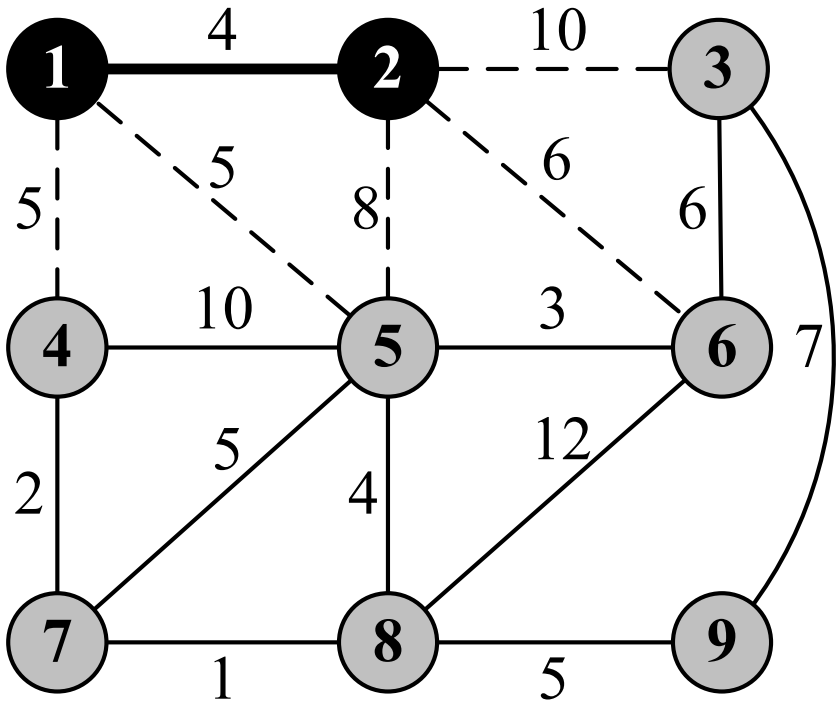
  if $cost(w,u_i)<dist(u_i)$ **then** $dist(u_i):=cost(w,u_i)$

- **Πολυπλοκότητα**: **$O(|V|^2)$**

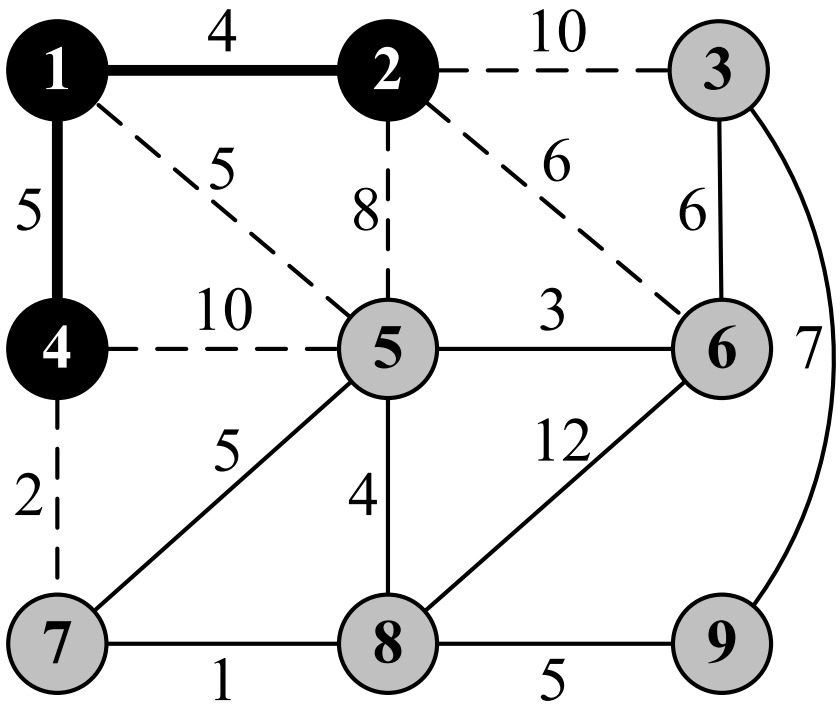
Αλγόριθμος Prim



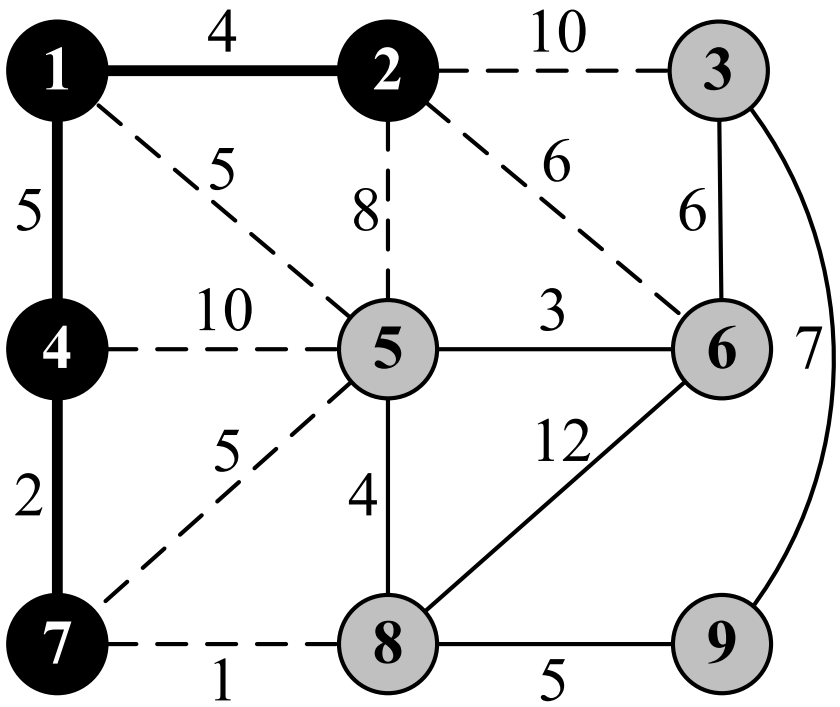
Αλγόριθμος Prim



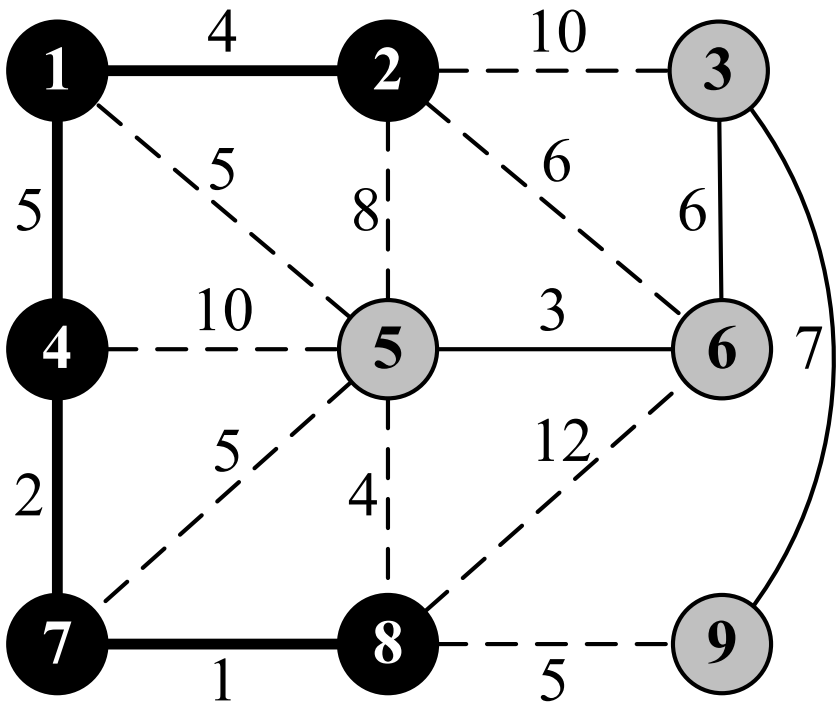
Αλγόριθμος Prim



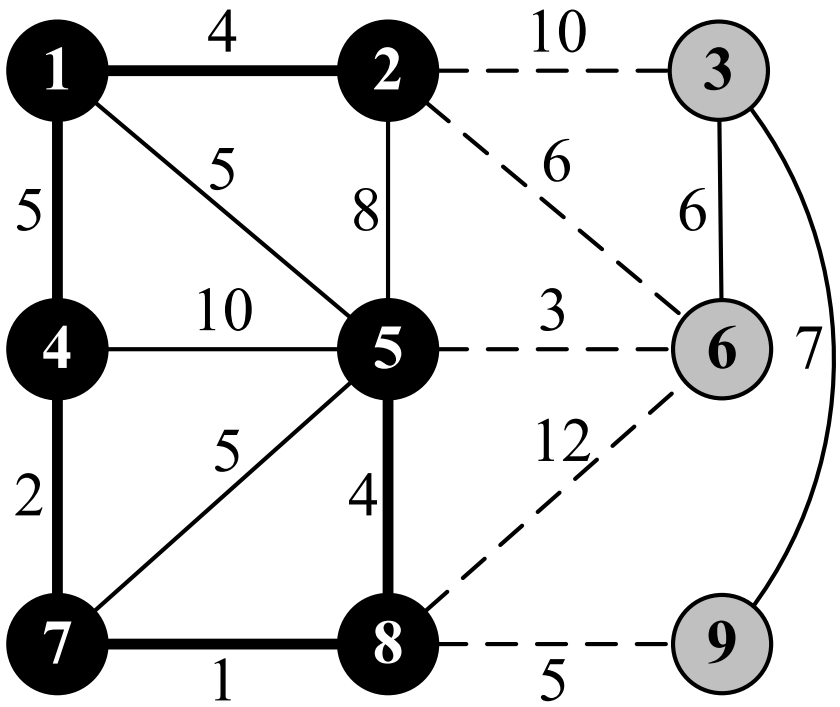
Αλγόριθμος Prim



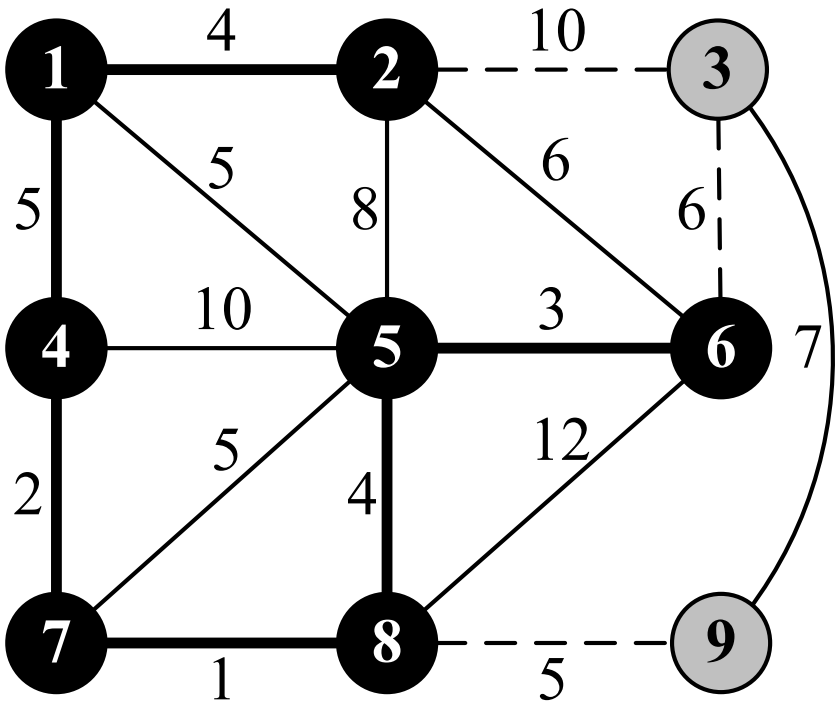
Αλγόριθμος Prim



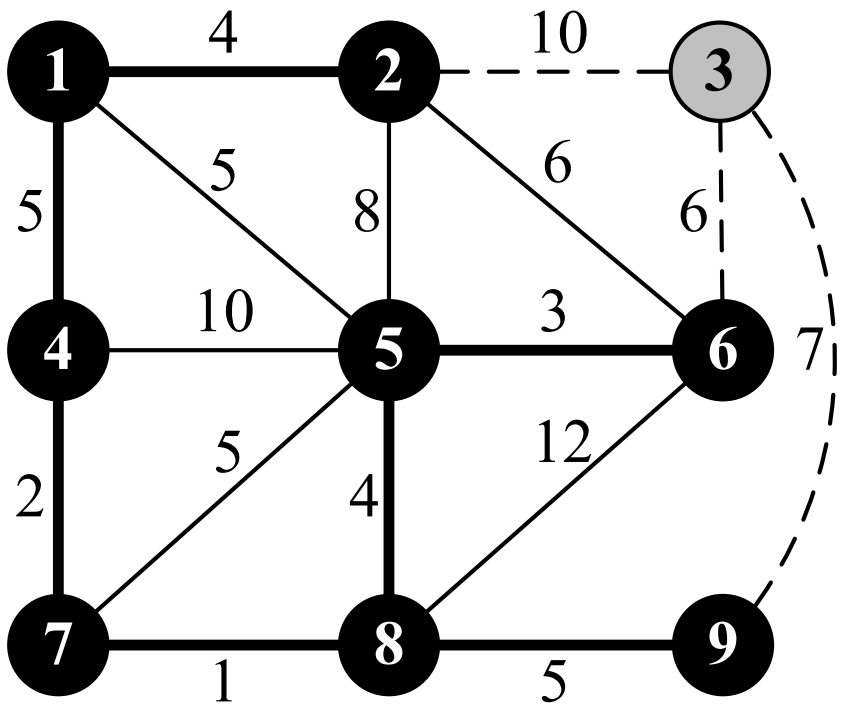
Αλγόριθμος Prim



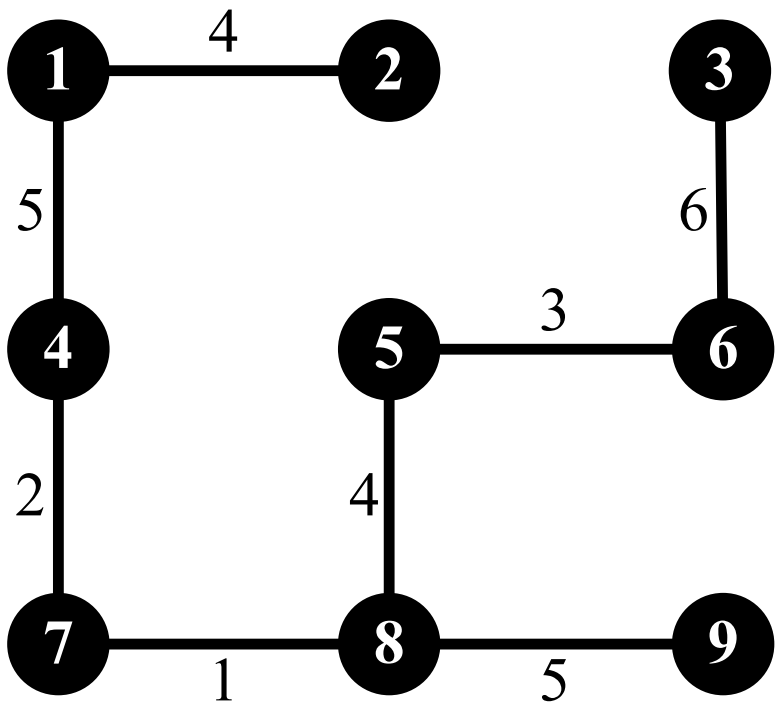
Αλγόριθμος Prim



Αλγόριθμος Prim



Αλγόριθμος Prim

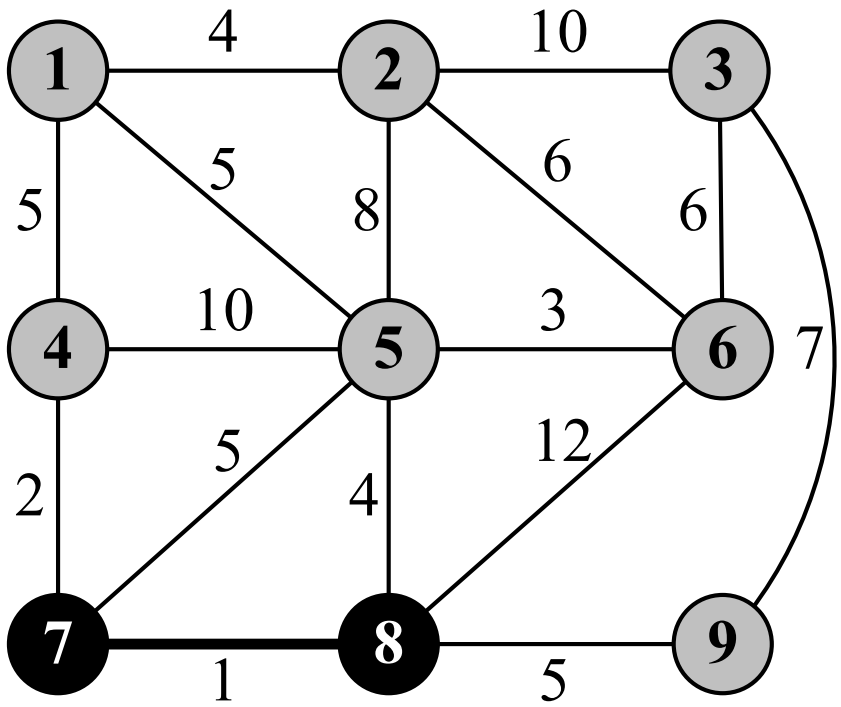


Αλγόριθμος Kruskal

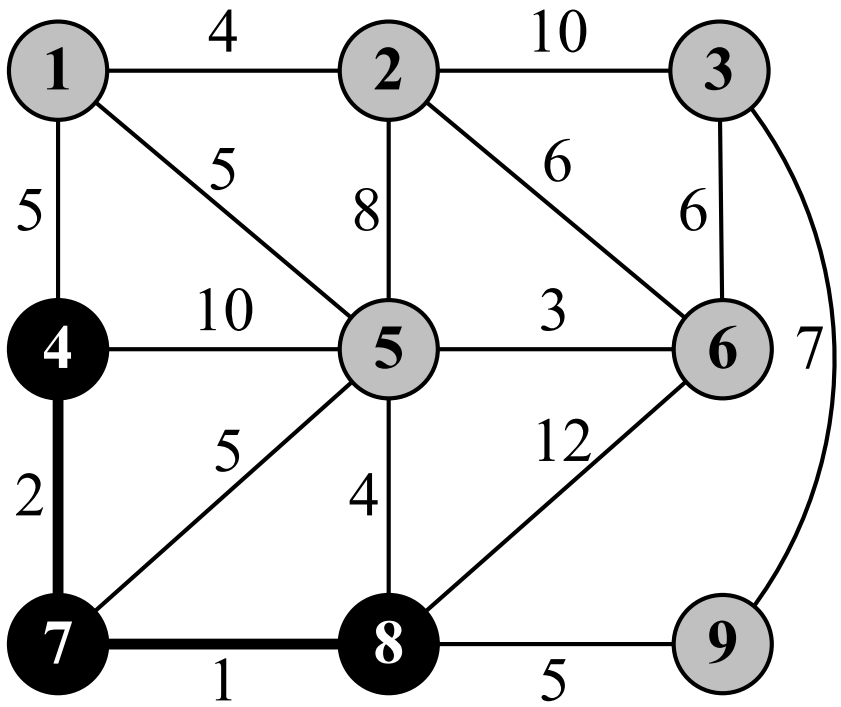
- Οι ακμές ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά κόστους. Κάθε φορά επιλέγεται η ακμή ελαχίστου κόστους και αν δε δημιουργεί κύκλο στο μέχρι στιγμής δάσος προστίθεται σε αυτό, αλλιώς απορρίπτεται.
- Για αποδοτική υλοποίηση, η ύπαρξη κύκλου ελέγχεται με χρήση πράξεων συνόλων (UNION-FIND).

- **Πολυπλοκότητα**: **O(|E|log|E|)**

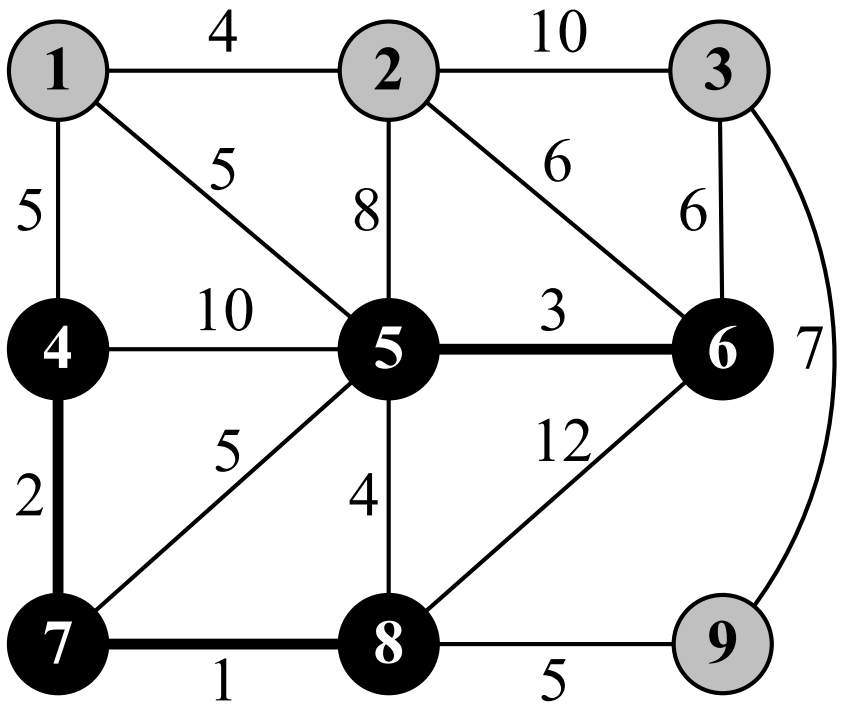
Αλγόριθμος Kruskal



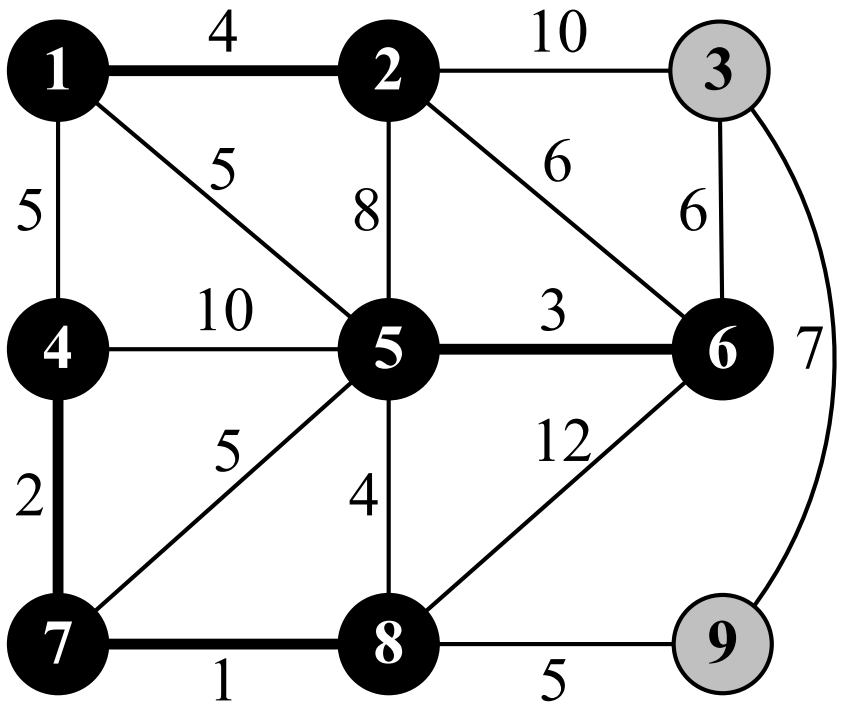
Αλγόριθμος Kruskal



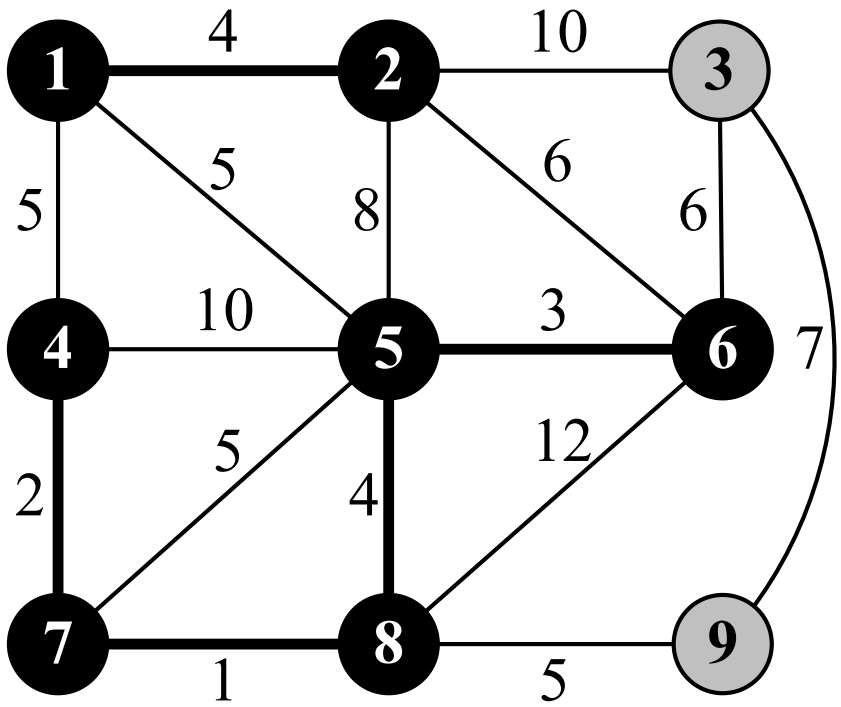
Αλγόριθμος Kruskal



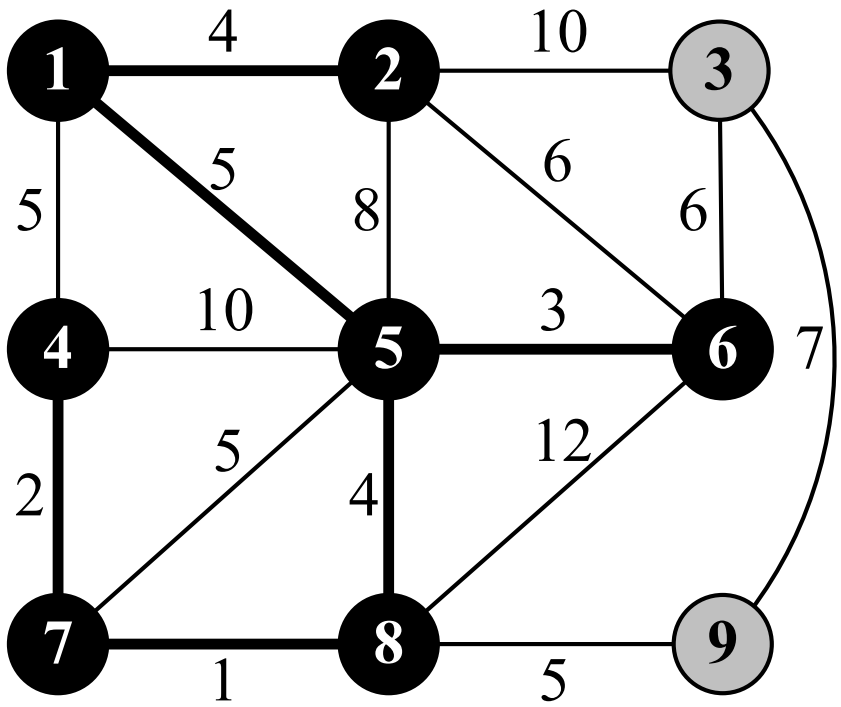
Αλγόριθμος Kruskal



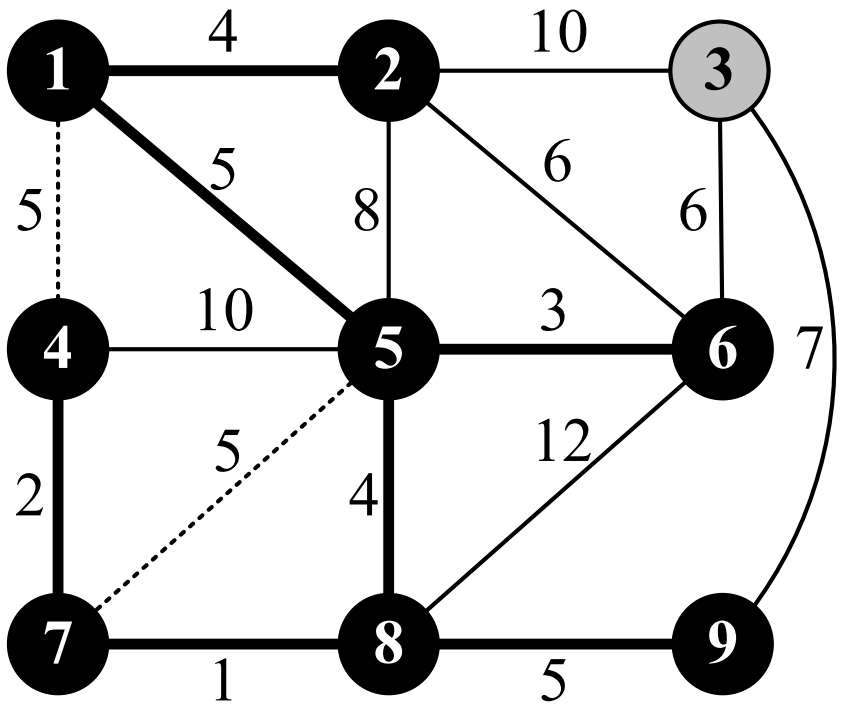
Αλγόριθμος Kruskal



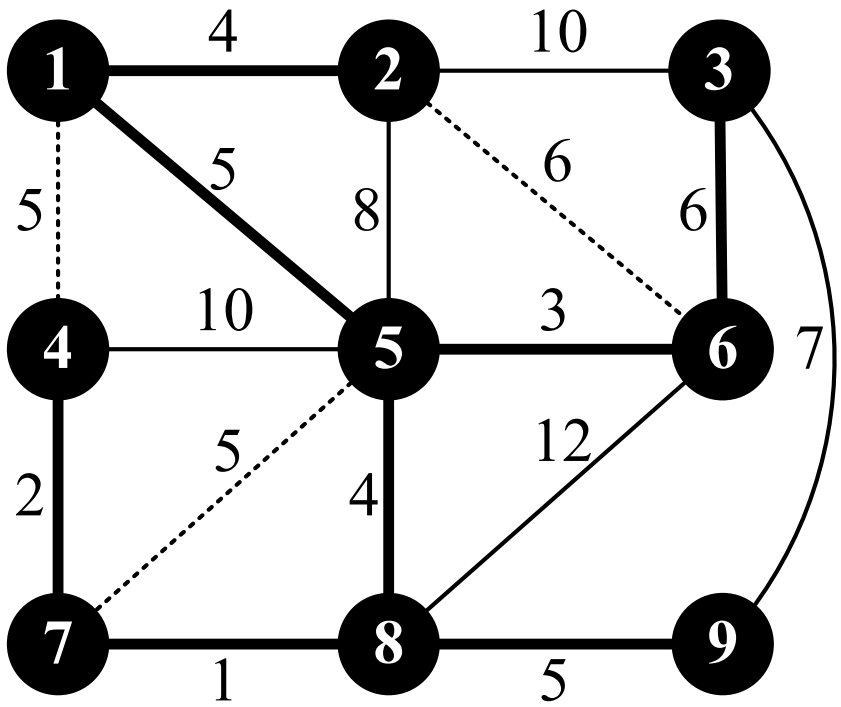
Αλγόριθμος Kruskal



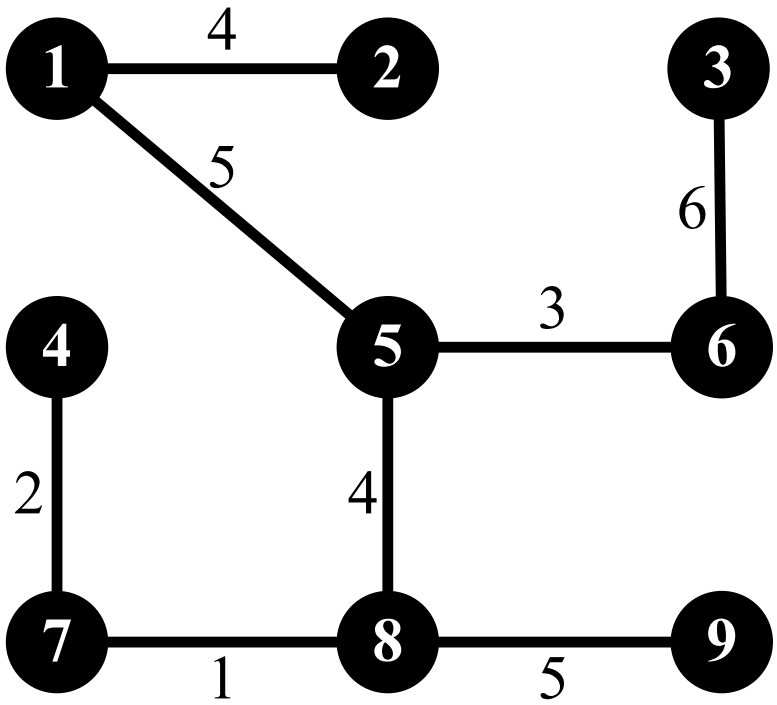
Αλγόριθμος Kruskal



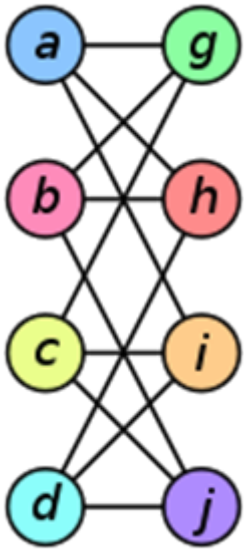
Αλγόριθμος Kruskal

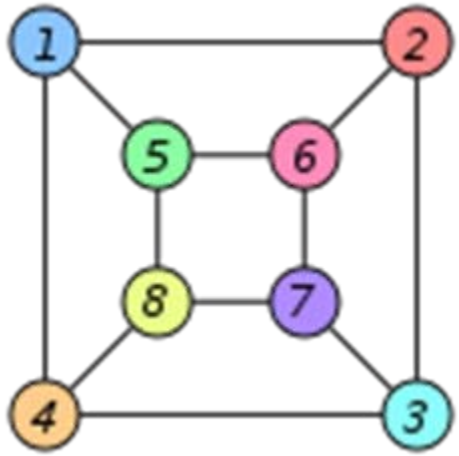


Αλγόριθμος Kruskal



«Ενδιάμεση» Πολυπλοκότητα;





Ισομορφισμός γράφων: δεν είναι NP-πλήρες πρόβλημα (κάτω από γενικά παραδεκτές υποθέσεις)

NP-πλήρη Προβλήματα Γράφων

- VERTEX COVER
- CLIQUE
- HAMILTON CIRCUIT (HC)
- TRAVELING SALESMAN (TSP)
- 3-COLORABILITY
- SUBGRAPH ISOMORPHISM
- 3-DIMENSIONAL MATCHING (3DM)